Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumedienne[1]

Faculté des Mathématiques

Département d'Analyse

Laboratoire des Systèmes Dynamiques

Notes de Cours du module

Fonctions de plusieurs variables

Par

LAADJ Toufik[2]

Pour

Troisième année Licence
Algèbre et Cryptographie

Septembre 2014

---

(1)USTHB : Bab Ezzouar Alger, Algérie.
(2)Page Web : http://perso.usthb.dz/~tlaadj/

Table des matières

Description du Cours

Objectif du Cours

L'objectif du module 'Fonctions de plusieurs variables' est de généraliser les concepts et les résultats fondamentaux des fonctions numériques d'une variable réelle, tels de dérivation et d'intégration, aux fonctions de plusieurs variables.

Contenu du Cours

- Fonctions de plusieurs variables
  - Continuité, différentiabilité, gradient, formule de Taylor.
  - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.
  - Extrema, extrema liés.
- Intégration des fonctions de plusieurs variables
  - Intégrales doubles et triples.
  - Intégrales curvilignes, intégrales de surfaces.
  - Formules de Stokes, d'Ostrogradski et de Green-Riemann.
- Équations différentielles $y' = f(x, y)$.
  - Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy.

(La partie des équations différentielles n'est pas encore disponible dans ce polycopié de cours).

Résultats d'apprentissage

À la fin du cours, l'étudiant doit avoir une bonne compréhension de l'analyse des fonctions de plusieurs variables et devrait être en mesure d'appliquer ces connaissances pour résoudre les exercices dans une variété de contextes.
En particulier, l'étudiant doit être capable de :

- Calculer les limites des fonctions de plusieurs variables.
- Étudier leurs continuités.
- Étudier leurs différentiabilité.
- Calculer les dérivées partielles premières des fonctions composées.
- Comprendre ce qu'une dérivée suivant un vecteur est.
- Calculer les dérivées partielles d'ordre supérieur.
- Citer et appliquer le théorème des accroissements finis.
- Calculer le développement de Taylor à l'ordre supérieur à deux.
- Trouver les points critiques et extrema libres.
- Comprendre et appliquer le théorème des fonctions implicites.
- Appliquer le théorème de Lagrange pour calculer les extrema liés.
- Effectuer l'intégration double et triple.
- Calculer les intégrales doubles en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.
- Calculer les intégrales triple en utilisant les coordonnées cylindriques et sphériques.
- Comprendre ce qu'une forme différentielle est.
- Effectuer l'intégration curviligne et de surface.
- Citer et appliquer les formules de Stokes, de Green-Riemann et d'Ostrogradski.

Chapitre 0

Rappel sur les propriétés topologique de $\mathbb{R}^n$

Sommaire

On désigne par $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble de tous les n-uples $(x_1, ..., x_n)$ où $x_i, i = 1, ..., n$, sont des nombres réels. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont notés x ou $(x_1, ..., x_n)$.

Si $n = 3$, une variante notation est souvent utilisée (x, y, z).

0.1 Notion de distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1

On appelle distance sur un ensemble E de $\mathbb{R}^n$, une application définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ notée d, qui à tout couple (x, y) de $E \times E$ fait correspondre un réel positif ou nul $d(x, y)$ vérifiant :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall (x, y) \in E^2$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall (x, y, z) \in E^3$.

Un ensemble E muni d'une distance est appelé espace métrique, on le désigne par (E, d).

Exemple 1

$E = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$. En effet,

1. $|x - y| = 0 \iff x = y$
2. $|x - y| = |y - x|$
3. $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. $\blacksquare$

Remarque 2

Sur un même ensemble E peuvent être définies plusieurs distances.

0.2 Normes dans $\mathbb{R}^n$

Définition 3

On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ une application N de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes

1. $N(x) = 0_{\mathbb{R}_+}$ si et seulement si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et λ dans $\mathbb{R}$.
3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$.

Le couple $(\mathbb{R}^n, N)$ est appelé un espace normé.

Remarque 4

À partir d'une norme N définie sur $\mathbb{R}^n$, on peut toujours définir une distance d associée à cette norme par la relation $d(x,y) = N(x-y)$. Réciproquement, il existe des distances définies sur $\mathbb{R}^n$ qui n'induisent pas de norme associée à celles-ci.
Sur $\mathbb{R}^n$, on peut définir plusieurs normes notées $N_1, N_2, ...$

Notation 1

Par la suite, une norme sur $\mathbb{R}^n$ sera désignée par la notation $\|.\|$ et sans indice quand il n'y a aucune ambiguïté.

Exemple 2

La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}^n$. ■

Exercice 1

Montrer que $\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x-y\|$ pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$.

0.2.1 Exemples de normes dans $\mathbb{R}^n$

Norme euclidienne

L'application

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_2 : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}, \end{array}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ appelée **norme euclidienne**.
Le produit scalaire de $x = (x_1, ..., x_n)$ avec $y = (y_1, ..., y_n)$ est défini par

$$x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On a en particulier $(\|x\|_2)^2 = x \cdot x$.

Inégalité de Cauchy-Schwartz Pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$ on a $|x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$, avec égalité si et seulement si x et y sont proportionnels.

Norme sup **ou** l^∞

La norme sup ou l^∞ est définie par $\|x\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Norme l^p, $1 \leq p < +\infty$

La norme l^p définie pour $1 \leq p < +\infty$ par $\|x\|_p = (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. On voit que le cas $p = 2$ correspond à la norme euclidienne.

0.2.2 Normes équivalentes

Définition 5

On dit que deux normes N_1 et N_2 définies sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes s'il existe deux constantes a et b strictement positives telles que

$$a\ N_1(x) \leq N_2(x) \leq b\ N_1(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

On vérifie aisément que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ceci montre que les normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ sont équivalentes deux à deux.
On a en fait la propriété fondamentale suivante.

Théorème 6

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes entre elles.

0.3 Propriétés topologique de $\mathbb{R}^n$

0.3.1 Suites de $\mathbb{R}^n$

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. On dit que cette suite converge vers une limite $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_k = x$ ou encore parfois $x_k \longrightarrow x$. Dans le cas contraire on dit que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge.

Proposition 7

La limite d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ si elle existe est unique.

Remarque 8

Dans le cas $n = 1$, on a $\|x_k - x\| = |x_k - x|$ et on retrouve la définition usuelle de la convergence des suites réelles.

Caractérisation des suites convergentes

Grâce à l'équivalence des normes, il est possible de remplacer la norme $\|.\|$ par n'importe quelle autre norme. En particulier en utilisant la norme $\|.\|_\infty$, on voit que si $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, ..., x_{n,k})$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, la convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers x est équivalente à la convergence pour tout $i = 1, ..., n$ de la suite des i-ème coordonnées $(x_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ vers la coordonnée x_i.

Propriétés des suites convergentes

Proposition 9

Toute suite convergente est bornée c'est-à-dire que si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x, alors il existe $M \geq 0$ telle que $\|x_k\| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus on a $\|x\| \leq M$.

Suites de Cauchy

Définition 10

On dit qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel k_0 tel que

$$p \geq k_0 \text{ et } q \geq k_0 \text{ impliquent } \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Proposition 11

Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, ..., x_{n,k})$ est une suite de Cauchy si et seulement si les n suites numériques $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}, ... (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy.

Théorème 12 (Critère de Cauchy)

Pour qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy.

Sous-suites de $\mathbb{R}^n$

Une sous-suite d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est suite : $k \longmapsto x_{\rho(k)}$ où $\rho : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Une sous-suite d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi appelée suite partielle ou encore suite extraite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Théorème 13 (de Bolzano-Weierstass)

De toute suite bornée $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\rho(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge.

0.3.2 Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

Boule ouverte de $\mathbb{R}^n$

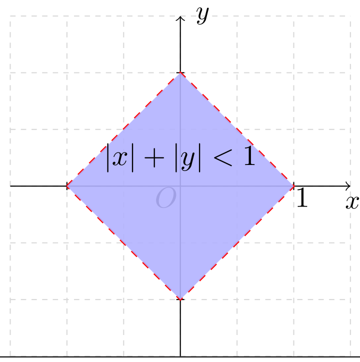
Définition 14 (boule ouverte de $\mathbb{R}^n$)

Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. On appelle boule ouverte de centre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ noté $B(x_0, r)$ ou $B_r(x_0)$ et défini par

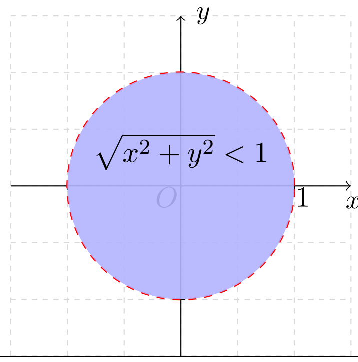
$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ \|x - x_0\| < r\}.$$

La représentation géométrique d'une boule dépend de la norme choisie dans $\mathbb{R}^n$. En effet, par exemple $B(0,1)$, la boule ouverte centrée en 0 et de rayon 1, de $\mathbb{R}^n$ admet différentes formes géométriques.

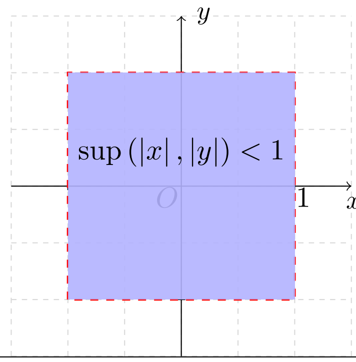
1. Sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_1$, $B(0,1)$ s'exprime par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ |x| + |y| < 1\}$.
2. Sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_2$, $B(0,1)$ s'exprime par $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \sqrt{x^2 + y^2} < 1\right\}$.
   Dans ce cas la boule $B(0,1)$ s'appelle disque ouvert centré en 0 et de rayon 1.
3. Sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, $B(0,1)$ s'exprime par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \sup(|x|, |y|) < 1\}$.



$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \|(x, y)\|_1 < 1\}$



$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \|(x, y)\|_2 < 1\}$



$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \|(x, y)\|_\infty < 1\}$

Points adhérents et points d'accumulation

Définition 15

Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est dit adhérent à une partie A de $\mathbb{R}^n$ si toute boule ouverte centrée en x_0 contient au moins un point de A i.e. pour tout $r > 0$, $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

Définition 16

Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est dit un point d'accumulation d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ si toute boule ouverte centrée en x_0 contient au moins un point de A autre que x_0 i.e. pour tout $r > 0$, $B(x_0, r) \cap (A \backslash \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Si x_0 est un point d'accumulation de A alors est adhérent à A. La réciproque est fausse ; il existe des points adhérents qui ne sont pas des points d'accumulation. Ce sont des points isolés de A.

Définition 17

On appelle adhérence de $A \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble des points adhérents à A, on le désigne par $\overline{A}$.

Définition 18

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ si $\overline{A} = \mathbb{R}^n$ i.e. l'adhérence de A est $\mathbb{R}^n$.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$. Alors on a les propriétés suivantes.

- Tout point de A est adhérent à A, i.e. $A \subset \overline{A}$.
- Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Théorème 19

Tout point d'accumulation de $A \subset \mathbb{R}^n$ est limite d'une suite de points de A.

Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

Définition 20 (d'un ouvert)

Un ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est dit ouvert si pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Par convention l'ensemble vide $\emptyset$ est ouvert.

Définition 21

Pour un ensemble quelconque E de $\mathbb{R}^n$ on dit que x est un point intérieur à E si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E$. L'ensemble des points intérieur à E est appelé l'intérieur de E et est noté $\mathring{E}$.

Proposition 22

- L'ensemble $\mathring{E}$ est le plus grand ouvert contenu dans E.
- L'ensemble E est ouvert si et seulement si il est égal à son intérieur i.e. $E = \mathring{E}$.

Définition 23 (d'un voisinage)

Un ensemble V est un voisinage de x s'il contient une boule ouverte non-vide de centre x.

Définition 24 (d'un fermé)

Un ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est dit fermé si son complémentaire $F^C = \mathbb{R}^n \backslash F$ est ouvert.

Proposition 25

- L'ensemble $\overline{E}$ est le le plus petit fermé contenant E.
- L'ensemble E est fermé si et seulement si il est égal à son adhérence $\overline{E}$ i.e. $E = \overline{E}$.

Théorème 26

Un ensemble F est fermé si et seulement si toute suite de points de F qui converge alors sa limite contenue dans F.

Définition 27 (boule fermée de $\mathbb{R}^n$)

Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. On appelle boule fermée de centre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble noté $\overline{B}(x_0, r)$ et défini par $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ \|x - x_0\| \leq r\}$.

Proposition 28

Une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

0.3.3 Quelques propriétés élémentaires

1. Toute union finie ou infinie d'ouverts est un ouvert.
2. Toute union finie de fermés est un fermé.
3. Toute intersection finie ou infinie de fermés est un fermé.
4. Toute intersection finie de d'ouverts est un ouvert.
5. Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.
6. Un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$ est fermé.
7. Pour tout ensemble E de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathring{E} \subset E \subset \overline{E}$.

Définition 29

On appelle frontière d'un ensemble E et on la note ∂E, l'ensemble des points de son adhérence qui ne sont pas dans son intérieur, c'est-à-dire $\partial E = \overline{E} \backslash \mathring{E} = \overline{E} \cap \left(\mathring{E}\right)^C$.

Ensembles bornés et ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$

Définition 30

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit borné s'il existe $R > 0$ tel que $E \subset \overline{B}\,(0, R)$ i.e. $\|x\| \leq R$ pour tout $x \in E$.

Définition 31

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact si de toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que $E \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ on peut extraire une sous famille finie $(U_1, ...U_m)$ telle que $E \subset (U_1 \cup ... \cup U_m)$.

Théorème 32

Pour un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

1. E est compact.
2. E est à la fois fermé et borné.
3. Propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de E admet une sous-suite qui converge vers une limite $x \in E$.

Exemple 3

Les boules fermées et les pavés fermées $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ de $\mathbb{R}^n$ sont des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$. ∎

Ensembles connexes et ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$

Définition 33

Un ensemble E est dit connexe s'il n'existe aucune paire d'ouverts (U_1, U_2) tels que $E \subset U_1 \cup U_2$ et $E \cap U_1$ et $E \cap U_2$ sont disjoints.

Autrement dit, E est connexe si on ne peut pas le séparer en deux parties disjointes en l'intersectant avec deux ouverts. Dans le cas d'un ensemble ouvert, cela se traduit par la propriété intuitive suivante.

Théorème 34

Un ensemble U est ouvert et connexe si et seulement si pour tout x et y dans U, il existe une ligne brisée contenue dans U qui les relie, c'est-à-dire un ensemble fini de points $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$ tel que $p_1 = x$ et $p_m = y$, et tel que les segments d'extrémités p_i et p_{i+1} sont tous contenus dans U.

Définition 35

Un ensemble E est dit convexe si pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$ on a $tx + (1-t)\,y \in E$, i.e. le segment d'extrémités x et y est contenu dans E.

En dimension $n = 1$ les connexes et les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles (de taille finie ou infinie). En revanche, en dimension $n > 1$ tout convexe est connexe mais la réciproque est fausse. Aussi une intersection finie ou infinie de compacts est un compact et de même pour les convexes.

Chapitre 1

Fonctions continues

Sommaire

1.1 Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

1.1.1 Définitions

Définition 36

Une application de $\mathbb{R}^n$, ou d'une partie de $\mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction numérique réelle de n variables réelles.

Exemple 4

Les fonctions f et g définies par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x+y, \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3/\{(0,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & g(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2}, \end{array}$$

sont des fonctions réelles à plusieurs variables (resp. à 2 et 3 variables). ■

On s'intéressera aussi parfois aux fonctions de n variables et à valeurs vectorielles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$. Notons que chacune des fonctions f_i est une fonction de n variables et à valeur réelle. On dit parfois que f est un champ de vecteurs à m composantes définis sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5

Pour la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x\sin y, xyz)$ on a

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,x) & \longmapsto & f_1(x,y,z) = x\sin y, \end{array} \quad \text{et} \quad f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,x) & \longmapsto & f_2(x,y,z) = xyz. \end{array}$$ ■

Définition 37

Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$, $a \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}^m$ une application de E dans $\mathbb{R}^m$. Alors

- E est appelé domaine de définition de la fonction f.
- L'ensemble $f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$ est appelé l'image de E par f.
- Si E est un voisinage de a, i.e. si E contient une boule ouverte de centre a, on dit que f est définie au voisinage de a.
- Si $F \subset \mathbb{R}^m$, on appelle image réciproque de F par f, l'ensemble noté $f^{-1}(F)$ où $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \in F\}$.

Exemple 6

Soit f la fonction à deux variables réelles x, y définie par $f(x,y) = x + \operatorname{Log} y$. Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ car $\operatorname{Log} y$ est définie uniquement pour $y > 0$.

L'image de f est $\mathbb{R}$ car pour tout $z \in \mathbb{R}$ on a $z = x + \operatorname{Log} y$ où $(x,y) = (z,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. ■

1.1.2 Représentation graphique

Une fonction d'une variable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles est décrite par son graphe, qui est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$G_f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ ; \quad x \in D\right\},$$

et que l'on représente par la courbe du plan d'équation $y = f(x)$.
Dans le cas d'une fonction de deux variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles on définit de même le graphe

$$G_f = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in D\right\},$$

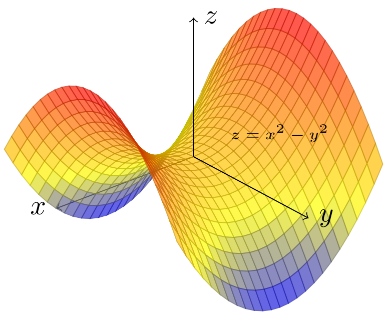
que l'on peut représenter comme une surface d'équation $z = f(x, y)$ dans l'espace à 3 dimensions.

Exemple 7

La représentation géométrique de la fonction

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

dans l'espace à 3 dimensions est dans la figure ci-contre. ▪



La notion de graphe s'étend de manière évidentes au cas des fonctions de n variables.

Définition 38 (graphe d'une fonction)

On appelle **graphe** d'une fonction f de n variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles, l'ensemble des points $(x, f(x)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ où x parcours D. Le graphe de f est noté

$$G_f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n\right\}.$$

Remarque 39

Il n'existe aucune méthode évidente pour représenter géométriquement une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

Définition 40 (courbe de niveau)

Soit f une fonction de n variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle **courbe de niveau** λ de la fonction f, l'ensemble C_λ des points de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par f vaut λ, c'est-à-dire

$$C_\lambda = \{x \in D \; ; \quad f(x) = \lambda\} .$$

1.2 Limite d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Soit f une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage d'un point a, sauf peut-être en a, et soit $l \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme quelconque $\|.\|$ des normes définies sur $\mathbb{R}^n$ car celles-ci sont équivalentes.

Dans tout ce chapitre si aucune précision n'est donnée, $\|.\|$ désigne l'une quelconque des trois normes connues $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$.

Définition 41

On dit que la fonction f admet l pour limite au point a si

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < \|x - a\| < \delta \quad \Longrightarrow \; |f(x) - l| < \varepsilon,$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = 2x + y^2$.

En utilisant la définition montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 2$.

Définition 42

On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) au point a si

$$\forall A > 0, \; \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < \|x - a\| < \delta \quad \Longrightarrow \; f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < -A).$$

Théorème 43
Si une fonction admet une limite en un point alors cette limite est unique.

Démonstration. Si une fonction f admet deux limites l et l' en un point a alors

$$0 \leq |l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |f(x) - l| + |f(x) - l'|.$$

D'où en faisant tendre x vers a dans l'inégalité précédente on trouve $0 \leq |l - l'| \leq 0$.
Donc $l = l'$. ∎

Exemple 8
Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
Pour voir si f admet une limite au point $(0,0)$, on remarque, par exemple, que
$\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2}{t^2+t^2} = \dfrac{1}{2}$ et que $\lim\limits_{t\to 0} f(t,2t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t^2}{t^2+4t^2} = \dfrac{2}{5}$.
Par conséquent si f admettait une limite l on aurait $l = \dfrac{1}{2}$ et $l = \dfrac{2}{5}$, ce qui est contradictoire d'après l'unicité de la limite. Donc f n'admet pas de limite au point $(0,0)$. ∎

Les opérations algébriques sur les limites concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

1.2.1 Changement de variables

Comme pour l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les changements de variables sont utiles pour le calcul de limite d'une fonction de plusieurs variables en un point. On mentionne ici le changement de variables le plus classique.

Coordonnées sphériques généralisées

Pour un point x de $\mathbb{R}^n$, de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$, on définit les coordonnées sphériques généralisées $(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1})$ par

$$\begin{aligned}
&r = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2},\\
&x_1 = r\cos\theta_1,\\
&x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
&...\\
&x_{n-1} = r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\
&x_n = r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}.
\end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques constituent le cas particulier $n = 3$ et les polaires $n = 2$.

1.3 Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Définition 44

Une fonction f définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite **continue** au point a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad : \ \|x - a\| < \delta \quad \Longrightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 45

Une fonction f est continue sur un ensemble E si elle est continue en tout point de cet ensemble.

Exemple 9

La fonction projection $P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, définie par $P_i(x) = P_i(x_1, ..., x_n) = x_i$ est continue en tout point $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. En effet, on a

$$|P_i(x) - P_i(a)| = |x_i - a_i| \leq \|x - a\|_1,$$

il suffit donc de prendre $\delta = \varepsilon$ dans la définition précédente. ▪

Théorème 46

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que f est continue au point a et définissons les fonctions réelles $g_1, ..., g_n$ à une variable réelle, par $t \mapsto g_i(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n)$.
Pour tout $i = 1, ..., n$ la fonction g_i qui est définie au voisinage de a_i est continue au point a_i.

Démonstration. Faire la démonstration à titre d'exercice. ■

Remarque 47

La réciproque du théorème précédent est fausse, autrement dit, la continuité des fonctions $g_1, ..., g_n$ respectivement en $a_1, ..., a_n$ n'implique pas, en général, la continuité de la fonction f au point a.

Exemple 10

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

On a au point $a = (a_1, a_2) = (0,0)$, $g_1(t) = f(t, a_2) = f(t,0) = 0$ et $g_2(t) = f(a_1, t) = f(0,t) = 0$ pour tout point $t \in \mathbb{R}$. Donc g_1 et g_2 sont continues respectivement en $a_1 = 0$ et $a_2 = 0$. Cependant f n'est pas continue en $a = (0,0)$ puisque elle n'admet même pas de limite en ce point. ▪

Théorème 48

Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in E$. La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telles que $\lim_{k\to+\infty} a_k = a$ on a $\lim_{k\to+\infty} f(a_k) = f(a)$.

Démonstration. Faire la démonstration à titre d'exercice. ■

Exercice 3

Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$.

Ainsi pour les opérations algébriques sur les fonctions continues concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

Remarque 49

Soit $f = (f_1, ..., f_m)$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. La fonction f est continue en a si et seulement si chaque composante $f_j, j = 1, ..., m$ est continue en a.

1.3.1 Fonctions continues et ensembles compacts

Définition 50 (continuité uniforme)
Une fonction continue d'une partie E de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur E si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \ : \ \forall x, y \in E,\ \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque 51
Dans la définition de la continuité uniforme le nombre δ ne dépend que de ε et de f.

Exercice 4

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 52
Soit E une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue sur E alors

1. f est bornée sur E i.e. il existe $M \geq 0$ telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in E$.
2. f est uniformément continue sur E.
3. L'image $f(E)$ de f est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
4. f atteint ses bornes inférieure et supérieure i.e. il existe $a, b \in E$ tels que
   $f(a) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$ et $f(b) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$.

Démonstration. Exercice. ■

Chapitre 2

Fonctions différentiables

Sommaire

2.1 Introduction

Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable au point $x_0 \in]a,b[$. On a par définition

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Soit ε la fonction définie au voisinage de 0 par $\varepsilon(h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$. On alors

$$f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0) = h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

La dérivabilité de la fonction f en x_0 revient à l'existence d'un nombre $f'(x_0)$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 vérifiant $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Lorsque h est assez petit, on peut écrire $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$. La notion de dérivée en un point permet d'approximer les valeurs de la fonction en des points proches de celui-là.

Nous allons voir comment ceci se généralise au cas d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ moyennant l'introduction de la notion de différentielle.

2.2 Définitions et propriétés élémentaires

Dans toute la suite de ce chapitre U désignera un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Définition 53

Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ et a un point de U. On dit que f est différentiable en a s'il existe une forme linéaire u_a sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) telle que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0, a+h\in U}} \frac{f(a+h) - f(a) - u_a(h)}{\|h\|} = 0,$$

où $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est différentiable sur U.

Remarque 54

La différentiabilité de f en a est équivalente à l'existence d'une forme linéaire u_a sur $\mathbb{R}^n$ et une fonction ε telle que

$$f(a+h) - f(a) - u_a(h) = \|h\| \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Proposition 55

La forme linéaire u_a introduite dans le définition précédente, quand elle existe, est unique.

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe deux formes linéaires u_a et v_a vérifiant la définition 53. Il vient alors

$$f(a+h) - f(a) - u_a(h) = \|h\| \varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0,$$

$$f(a+h) - f(a) - v_a(h) = \|h\| \varepsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0.$$

En posant $w_a = u_a - v_a$ et $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, il vient $w(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Pour $h = t\ e_i, t > 0$, on obtient $w(t\ e_i) = \|t\ e_i\| \varepsilon(t\ e_i)$ avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t\ e_i) = 0$.

D'où, en utilisant la linéarité de w et en simplifiant

$$w(e_i) = \|e_i\| \varepsilon(t\ e_i) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t\ e_i) = 0.$$

Ce qui donne $w(e_i) = 0, i = 1, ..., n$. Alors $w_a = 0$ et donc $u_a = v_a$. ■

Définition 56

La forme linéaire u_a s'appelle différentielle de f en a et se note $Df(a)$.

Remarque 57

Soit $f = (f_1, ..., f_m)$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. La fonction f est différentiable en a si et seulement si chaque composante $f_j, j = 1, ..., m$ est différentiable en a.

Définition 58

Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ différentiable sur U.

On appelle fonction différentielle de f la fonction notée Df définie par

$$\begin{array}{rccc} Df: & U & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ & x & \longmapsto & Df(x), \end{array}$$

où $(\mathbb{R}^n)^*$ désigne le dual de $\mathbb{R}^n$ i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 11

Soit u une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. On a $u(x+h) = u(x) + u(h)$, pour tout $x, h \in \mathbb{R}^n$. D'où

$$\frac{u(a+h) - u(a) - u(h)}{\|h\|} = 0.$$

Il est alors clair (définition 53) que u est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $Du(x) = u,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

La fonction différentielle de u est alors la fonction constante définie par

$$\begin{array}{rccc} Du: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ & x & \longmapsto & Du(x) = u. \end{array}$$

■

Exemple 12

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Montrons que la dérivabilité de f sur I implique sa différentiabilité et réciproquement.

Supposons f dérivable sur I et soit $x \in I$. On a alors

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0, x+h\in I}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

D'où

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0, x+h\in I}} \frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{|h|} = 0.$$

Comme l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & f'(x)h. \end{array}$$

est linéaire, il découle alors que f est différentiable en x et $Df(x)(h) = f'(x)h, \forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R}$.

Comme $Df(x)$ est une application linéaire on a $Df(x)(h) = hDf(x)(1) = f'(x)h,\ \forall h \in \mathbb{R}$.

D'où $Df(x)(1) = f'(x),\ \forall x \in I$.

Réciproquement, supposons f différentiable sur I, i.e.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0, x+h\in I}} \frac{f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)}{|h|} = 0.$$

Ce qui donne

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0, x+h\in I}} \frac{f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)}{h} = 0.$$

Comme $Df(x)(h) = hDf(x)(1)$, on tire $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0, x+h\in I}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = Df(x)(1)$.

Ce qui prouve que f est dérivable en x et que $f'(x) = Df(x)(1)$. ▪

Remarque 59

Soit $f = (f_1, ..., f_m)$ une fonction de $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ différentiable en $a \in U$.

La fonction différentielle de f en a notée $Df(a)$ définie par

$$\begin{array}{rccl} Df(a): & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & h & \longmapsto & Df(a)(h) = (Df_1(a)(h), ..., Df_m(a)(h)). \end{array}$$

Théorème 60

Si f est une fonction de U dans $\mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$, elle est alors continue en a.

Démonstration. Si f est différentiable en a, on a alors

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \|h\| \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Comme $\lim_{h \to 0} Df(a)(h) = Df(a)(0) = 0$, il vient $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. Il s'ensuit que f est continue en a. ■

Remarque 61

1. La réciproque de ce théorème est fausse.
2. Ce théorème montre que la non continuité de f en a entraîne sa non différentiabilité (c'est souvent sous cette forme qu'il est utilisé).

Les opérations algébriques sur les fonctions différentiables concernant sommes, différences, produits, quotients et multiplication par un scalaire sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions dérivables d'une variable réelle.

2.3 Dérivées partielles, gradient et matrice jacobienne

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour $\delta > 0$ assez petit et i fixé entre 1 et n désignons par g_i la fonction réelle à une variable réelle, définie par

$$\begin{array}{rrcl} g_i : &]a_i - \delta, a_i + \delta[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g_i(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n), \end{array}$$

(toutes les variables dans f sont fixées sauf la i-ième).

Définition 62

On dit que la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle par rapport à la i-ième variable au point a si la fonction g_i introduite ci-dessus est dérivable au point a_i.
On appelle alors dérivée partielle de f par rapport à la i-ième variable, au point a le nombre noté $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ défini par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g_i'(a_i) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a)}{h}.$$

Le calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ consiste à ne dériver l'expression de f que par rapport à x_i. Notons que les fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont aussi des fonctions de n variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 13

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(xy)$ admet des dérivées partielles par rapport aux variables x et y en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

▪

Proposition 63

Si une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, elle admet en a des dérivées partielles par rapport à toutes les variables et on a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a)(e_i), \quad i = 1, ..., n, \\ &Df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i, \quad \forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$\{e_1, ..., e_n\}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. L'hypothèse de différentiabilité de f en a s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \|h\|\, \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Pour $h = h_i e_i$, la relation précédente donne

$$f(a + h_i e_i) = f(a) + Df(a)(h_i e_i) + \|h_i e_i\|\, \varepsilon(h_i) \text{ avec } \lim_{h_i \to 0} \varepsilon(h_i) = 0,$$

ou encore, en tenant compte du fait que $Df(a)$ est une forme linéaire

$$\frac{f(a + h_i e_i) - f(a)}{h_i} = Df(a)(e_i) + \frac{|h_i|}{h_i}\|e_i\|\, \varepsilon(h_i) \text{ avec } \lim_{h_i \to 0} \varepsilon(h_i) = 0.$$

Ce qui implique que

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a)}{h_i} = Df(a)(e_i).$$

La fonction f admet donc une dérivée partielle par rapport à x_i en a et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a)(e_i), \quad i = 1, ..., n.$$

D'où

$$Df(a)(h) = Df(a)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i Df(a)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i.$$

■

Définition 64 (gradient)

Si f est une fonction de U dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en a, on appelle *gradient* de f en a le vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté $\operatorname{grad} f(a)$ ou $\nabla f(a)$ défini par

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right).$$

Définition 65 (matrice jacobienne)

Si $F = (F_1, ..., F_m)$ est une fonction de U à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ admettant des dérivées partielles en a, on appelle *matrice jacobienne* de F en a la matrice à m lignes et n colonnes notée $J_F(a)$ définie par

$$J_F(a) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(a) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) & ... & \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial F_m}{\partial x_j}(a) & ... & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est également notée par $\dfrac{\partial (F_1, ..., F_m)}{\partial (x_1, ..., x_n)}(a)$ ou $\dfrac{D(F_1, ..., F_m)}{D(x_1, ..., x_n)}(a)$.

À noter que certains ouvrages définissent la matrice jacobienne comme la transposée de la matrice ci-dessus.

Remarque 66

Avec les deux notions précédentes, les différentielles peuvent être écrites sous la forme

$$Df(a)(h) = \langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle \text{ et } DF(a)(h) = J_F(a)\,h, \ \forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

où le symbole $\langle \ , \ \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ qui est défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \ \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 67

Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x), i = 1, ..., n$ existent en tout point x de U et si les fonctions dérivées partielles

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}$$

sont continues.

Exemple 14

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \operatorname{Log}(x^2 + y^2 + 1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisque

1. Ses dérivées partielles existent en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$
2. Les fonctions dérivées $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. ∎

Exemple 15

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Il est facile de vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existent sur $\mathbb{R}^2$ et sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y\left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrons que f n'est pas continue aux points $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}^*$.

Pour cela considérons la suite de points $\left(\frac{1}{2\pi n}, y_0\right) \in \mathbb{R}^2$. Cette suite tend vers $(0, y_0)$ quand n tend vers l'infini, cependant

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2\pi n}, y_0\right) = -y_0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = 0.$$

Donc la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. ∎

Proposition 68

Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors f est différentiable sur U.

Démonstration. Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in U$. U étant ouvert, il existe une boule ouverte $B(a, r) \subset U$, ce qui signifie que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \|h\| < r \text{ implique que } a + h \in B(a, r) \subset U \text{ où } \|h\| = \sum_{i=1}^{n} |h_i|.$$

Soit h vérifiant $\|h\| < r$. Posons $b_i = a + (h_1, ..., h_i, 0, ..., 0)$, $i = 1, ..., n$.
Alors $b_i \in B(a, r)$ car $\|b_i - a\| = \|(h_1, ..., h_i, 0, ..., 0)\| = \sum_{j=1}^{i} |h_j| \leq \|h\| < r$.
On a

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(b_n) - f(a) \\ &= f(b_n) - f(b_{n-1}) + f(b_{n-1}) - f(b_{n-2}) + ...f(b_1) - f(a) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(b_{i-1})) \text{ avec } b_0 = a. \end{aligned}$$

Comme la fonction f admet des dérivées partielles sur U, alors par application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$t \longmapsto f(a_1 + h_1, ..., a_{i-1} + h_{i-1},\ t\ , a_{i+1}, ..., a_n),$$

on aura

$$\begin{aligned} f(b_i) - f(b_{i-1}) &= f(a_1 + h_1, ..., a_i + h_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1 + h_1, ..., a_{i-1} + h_{i-1}, a_i, ..., a_n) \\ &= h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i), \end{aligned}$$

où $c_i = a + (h_1, ..., h_{i-1}, \theta_i h_i, 0, ..., 0)$ et $\theta_i \in]0, 1[$, $i = 1, ..., n$.
Ceci permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left| f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) \right| \\ &\leq \|h\| \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue, alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_i > 0$ tel que

$$\forall x \in U\ \ \|x - a\| < \delta_i \Longrightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \varepsilon.$$

Pour $x = c_i$ on a $\|x - a\| = \|c_i - a\| = \|(h_1, ..., h_{i-1}, \theta_i h_i, 0, ..., 0)\| \leq \|h\|$.
Si on prend $\delta = \min(r, \delta_1, ..., \delta_n)$, alors pour $\|h\| < \delta$ on aurait $\max\limits_{1\leq i\leq n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| < \varepsilon$.
Il s'ensuit alors que

$$\frac{\left|f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right|}{\|h\|} < \varepsilon \text{ tandis que } \|h\| < \delta.$$

Ce qui signifie que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{\|h\|} = 0.$$

Cette dernière relation jointe au fait que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array}$$

est linéaire montre que f est différentiable en a et sa différentielle est

$$Df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \qquad \blacksquare$$

Remarque 69

La réciproque de cette proposition est fausse i.e. il existe des fonctions qui sont différentiables mais pas de classe $\mathcal{C}^1$. Autrement dit, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est strictement inclus dans l'ensemble des fonctions différentiables.

Exemple 16

Reprenons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de l'exemple 15, qu'est définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On a vu que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Posons $E = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \in \mathbb{R}\}$.
Sur $\mathbb{R}^2 \backslash E$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ car ses dérivées partielles sont continues. Il reste à prouver la différentiabilité de f sur E.
On a

$$\begin{aligned} \frac{\left|f(h, y+k) - f(0,y) - \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)\right)\right|}{|h| + |k|} &= \begin{cases} \dfrac{h^2 (y+k) \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{|h| + |k|} & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases} \\ &\leq |h(y+k)|. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h, y+k) - f(0,y) - \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) \right) \right|}{|h| + |k|} = 0,$$

la fonction f est donc différentiable en tout point de E et $Df(0,y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$. ∎

2.3.1 Interprétation géométrique de la différentielle

Soit f une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point de U, h un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Supposons que f est différentiable en a. Alors on a

$$f(a+h) - f(a) = Df(a)(h) + \|h\| \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Lorsque $\|h\|$ est assez petit, on peut écrire $f(a+h) \approx f(a) + Df(a)(h)$. Ce qui signifie que f est peu différent de sa partie linéaire au voisinage de a.

$$f(x) \approx f(a) + \operatorname{grad} f(a) \cdot (x-a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i).$$

Géométriquement, au voisinage de $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, le graphe de f,

$$G_f = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} ;\quad x \in U \subset \mathbb{R}^n \right\}$$

diffère peu du plan de $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} ;\quad x \in \mathbb{R}^n,\ y = f(a) + \operatorname{grad} f(a) \cdot (x-a) \right\}.$$

Ce plan est appelé le plan tangent de G_f en $(a, f(a))$ qui a pour équation

$$y = f(a) + \operatorname{grad} f(a) \cdot (x-a).$$

Ce plan est engendré par les vecteurs

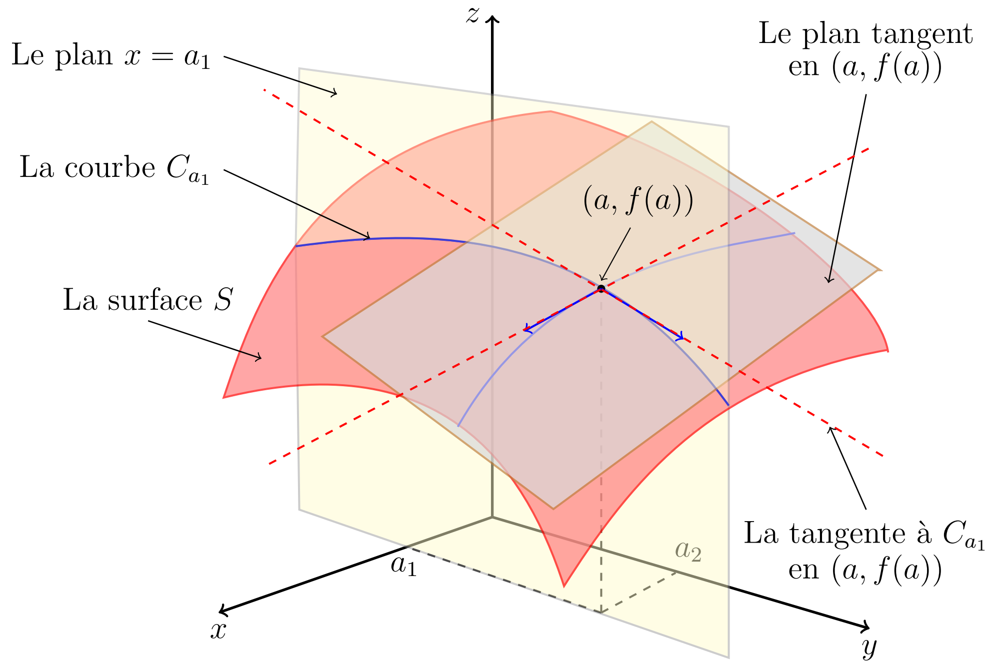
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x, f(x))(a), i = 1..., n, \text{ ou encore } \left(e_i, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right), i = 1..., n,$$

où $\{e_1, ..., e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

En dimension 2 le graphe de f est une surface S de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x,y)$ et le plan tangent en $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ a pour équation

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2).$$

La section de la surface S par le plan d'équation $x = a_1$ est une courbe C_{a_1}. Cette courbe est le graphe de la fonction $y \mapsto z(y) = f(a_1, y)$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ est la pente de sa tangente en $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. De même pour la section de la surface S par le plan d'équation $y = a_2$.



2.4 Composition des fonctions différentiables

Soit n, m deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert dans $\mathbb{R}^m$, F une fonction de U dans V, G une fonction de V dans $\mathbb{R}$, a un point de U.

$$\begin{tikzcd}
U \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "G \circ F"] & V \subset \mathbb{R}^m \arrow[r, "G"] & \mathbb{R} \\
\Cup & \Cup & \Cup \\
a & F(a) & (G \circ F)(a)
\end{tikzcd}$$

Théorème 70

Si F est différentiable en a et G différentiable en $F(a)$ alors la fonction $G \circ F$ est différentiable en a et on a

$$D(G \circ F)(a) = DG(F(a)) \circ DF(a).$$

Démonstration. Posons $b = F(a)$ et $H = G \circ F$.

La différentiabilité de F en a et de G en b signifie que

$$F(a+h) - F(a) = DF(a)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0,$$

$$G(b+k) - G(b) = DG(b)(k) + \|k\| \varepsilon_2(k) \text{ avec } \lim_{k \to 0} \varepsilon_2(k) = 0.$$

En prenant $k = k(h) = F(a+h) - F(a) = F(a+h) - b$, on déduit

$$\begin{aligned} H(a+h) - H(a) &= G(F(a+h)) - G(F(a)) \\ &= G(b+k) - G(b) = DG(b)(k) + \|k\| \varepsilon_2(k) \\ &= DG(b) \Big(DF(a)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h) \Big) + \|k\| \varepsilon_2(k) \\ &= (DG(b) \circ DF(a))(h) + \|h\| \varepsilon(h), \end{aligned}$$

où $\varepsilon(h) = DG(b)(\varepsilon_1(h)) + \dfrac{\|k(h)\|}{\|h\|} \varepsilon_2(k(h))$.

Comme $DG(b)$ et $DF(a)$ sont des applications linéaires, alors $DG(b) \circ DF(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Par suite, pour prouver que H est différentiable en a, il suffit de prouver que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Et alors on aura

$$DH(a)(h) = D(G \circ F)(a)(h) = (DG(F(a)) \circ DF(a))(h).$$

D'une part, $\dfrac{\|k(h)\|}{\|h\|}$ est borné au voisinage de $h = 0$ car

$$\begin{aligned} \frac{\|k(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|DF(a)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\|}{\|h\|} &= \left\| DF(a) \left(\frac{h}{\|h\|} \right) + \varepsilon_1(h) \right\| \\ &\leq \left\| DF(a) \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right\| + \|\varepsilon_1(h)\| \leq \|DF(a)\| + \|\varepsilon_1(h)\|. \end{aligned}$$

D'autre part on a $\lim\limits_{h \to 0} DG(b)(\varepsilon_1(h)) = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2(k(h))$ car $DG(b)$ est une application linéaire et F est une fonction continue puisqu'elle est différentiable.

Par conséquent $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire 71

Si F et G sont différentiables sur U et V respectivement alors $G \circ F$ est différentiable sur U et ses dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial (G \circ F)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial y_j}(F(x)) . \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x), \quad \forall x \in U, \ i = 1, ..., n.$$

Cette formule est appelée la règle de dérivation en chaîne.

Exemple 17 (Passage en coordonnées polaire)

Soit φ la fonction associée au changement de variables en coordonnées polaires et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "g = f \circ \varphi"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
(r, \theta) \arrow[r, mapsto] & \varphi(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \arrow[r, mapsto] & g(r, \theta) = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)
\end{tikzcd}$$

Les fonctions composantes de φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ car leurs dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) &= \cos\theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r\sin\theta, \\
\frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) &= \sin\theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) &= r\cos\theta,
\end{aligned}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$. Il s'ensuit alors que la fonction $g = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta), \\
\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta),
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta), \\
\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).
\end{aligned}$$

■

2.5 Dérivée suivant un vecteur - Dérivée directionnelle

Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$, a un point de U, h un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. U étant ouvert, il existe une boule ouverte $B(a, r) \subset U$, ce qui signifie que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| < r \text{ implique que } a + x \in B(a, r) \subset U.$$

Soit r_0 un réel strictement positif vérifiant $\|r_0 h\| < r$. Posons $I_{r_0} =]-r_0, r_0[$.

Soit ainsi la fonction $\varphi : I_{r_0} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(a + t\,h)$.

Noter que $a + t\,h \in B(a, r) \subset U$ car $\|t\,h\| < \|r_0 h\| < r$.

Définition 72

On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur h si la fonction φ précédente est dérivable en 0. Dans ce cas, le nombre $\varphi'(0)$ s'appelle dérivée de f en a suivant le vecteur h et se note $d_h f(a)$ qui est donnée par

$$d_h f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\,h) - f(a)}{t}.$$

La dérivée de f en a suivant le vecteur h mesure les variations de f lorsqu'on se déplace autour de a dans la direction du vecteur h. Si h est le vecteur nul, cette dérivée existe toujours et a une valeur nulle.

Remarque 73

Si $\|h\| = 1$, la dérivée précédente porte le nom de dérivée directionnelle de f en a suivant la direction h.

Proposition 74

Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. Si f est différentiable en a alors elle admet en a une dérivée suivant n'importe quel vecteur h non nul et on a

$$Df(a)(h) = d_h f(a).$$

Démonstration. Soit h un vecteur no nul de $\mathbb{R}^n$ et t un réel vérifiant $a + t\,h \in B(a,r) \subset U$. On a

$$f(a+t\,h) - f(a) = Df(a)(t\,h) + \|t\,h\|\,\varepsilon(t\,h) \text{ avec } \lim_{t\to 0}\varepsilon(t\,h) = 0.$$

En utilisant la linéarité de $Df(a)$ on en déduit que

$$\frac{f(a+t\,h) - f(a)}{t} = Df(a)(h) + \frac{|t|}{t}\|h\|\,\varepsilon(t\,h) \text{ avec } \lim_{t\to 0}\varepsilon(t\,h) = 0.$$

D'où $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(a+t\,h) - f(a)}{t} = Df(a)(h)$, ce qui donne $d_h f(a) = Df(a)(h)$. ■

Remarque 75

On voit en particulier que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ correspond à la dérivée en a suivant le vecteur de la base canonique e_i.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a)(e_i) = d_{e_i} f(a).$$

La réciproque de la proposition 74 est fausse, il existe des fonctions qui admettent des dérivées suivant tout vecteur en un point mais ne sont pas différentiables en ce point comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple 18

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Pour $h=(h_1,h_2)\neq(0,0)$, on a

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t\,h_1,t\,h_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3h_1^2h_2}{t^3(h_1^2+h_2^2)}=\frac{h_1^2h_2}{h_1^2+h_2^2}.$$

Alors, la fonction f admet une dérivée suivant tout vecteur h en $(0,0)$ et on a

$$d_hf(0,0)=\frac{h_1^2h_2}{h_1^2+h_2^2}.$$

Montrons que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Un calcul simple montre que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$$

Si f était différentiable en $(0,0)$ on aurait $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

Montrons que cela est faux. On a pour $y=\lambda\,|x|\,,\ \lambda\neq 0$,

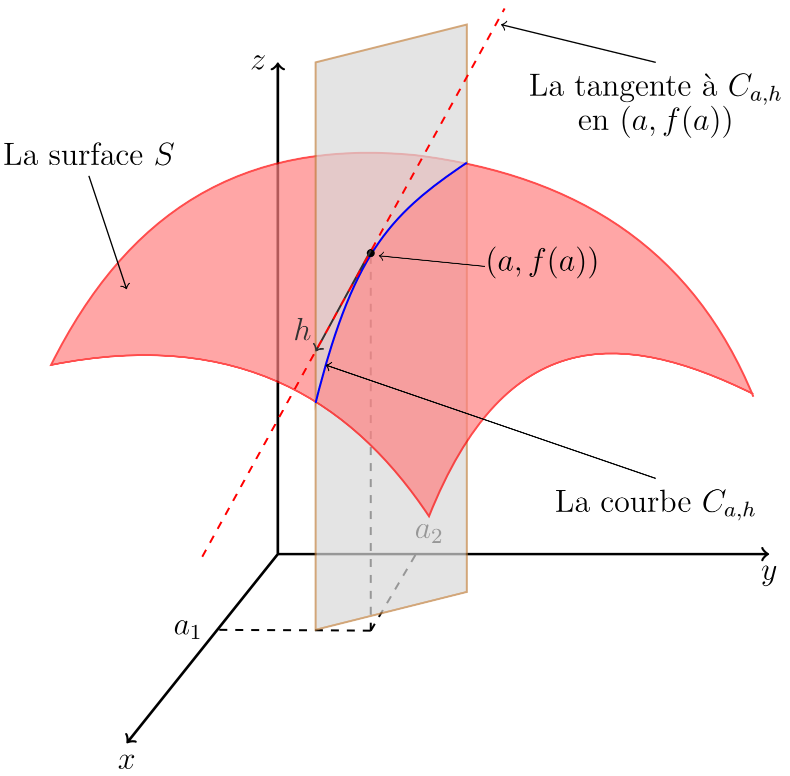
$$\frac{f(x,\lambda\,|x|)}{\sqrt{x^2+\lambda^2\,|x|^2}}=\frac{\lambda x^2\,|x|}{\left(x^2+\lambda^2\,|x|^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Alors la limite de $\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ n'existe pas quand (x,y) tend vers $(0,0)$. La fonction f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$. ∎

2.5.1 Interprétation géométrique en dimension 2

Soit f une fonction de $U\subset\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en $a=(a_1,a_2)\in U$, $h=(h_1,h_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Le graphe de f est une surface S de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z=f(x,y)$.

Si on coupe la surface S par le plan vertical contenant la droite passant par a et dirigée par h, on obtient la courbe paramétrée $C_{a,h}:t\mapsto(a+t\,h,f(a+t\,h))$. La dérivée $d_hf(a)$ de f au point a suivant le vecteur h est la pente de la tangente à la courbe $C_{a,h}$ en $(a,f(a))$.



L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire $|d_h f(a)| = |\langle \operatorname{grad} f(a), h\rangle| \leq \|\operatorname{grad} f(a)\| \|h\|$ avec égalité si et seulement si h est colinéaire au gradient de f en a.

La pente de la tangente en a est donc maximale en choisissant la direction du gradient en a, ce qui est à la base des méthodes de descente dans les problèmes de minimisation.

Chapitre 3

Théorèmes généraux du calcul différentiel

Sommaire

3.1 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition 76

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction admettant sur U une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ par rapport à la j-ième variable au point a, on dit que $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ est une dérivée partielle d'ordre 2 au point a par rapport à la i-ième et j-ième variables prises dans cet ordre.

Notation 2

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ *est généralement noté* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ *ou* $\partial^2_{x_j x_i} f(a)$.

Exemple 19

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Calculons $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Il est facile de vérifier que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - x^3 y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x^5}{x^4}}{x} = 1$ et $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0$.
D'où $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$. ▪

À partir des dérivées partielles d'ordre 2, on définit les dérivées partielles d'ordre 3 lorsqu'elles existent. De proche en proche, on définit les dérivées partielles d'ordre quelconque lorsqu'elles existent. La dérivée partielle d'ordre k de $f : U \to \mathbb{R}$ au point a par rapport aux variables $x_{i_k}, ..., x_{i_2}, x_{i_1}$ prises dans cet ordre est notée $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}}(a)$, qu'est par définition la dérivée partielle au point a par rapport à la variable d'indice x_{i_1} de la fonction $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}}$.

Exemple 20

Cherchons les dérivées partielles d'ordre 3 de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$f(x,y) = x + y - x^2 y^3$.

1. Les dérivées partielles d'ordre 1 sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - 2xy^3, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - 3x^2 y^2.$$

2. Les dérivées partielles d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y^3, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6x^2 y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -6xy^2.$$

3. Les dérivées partielles d'ordre 3 sont

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 0, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -6x^2, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = -12xy,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = -6y^2.$$

▪

Définition 77

Soit f une fonction de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^k$ sur U et on écrit $f \in \mathcal{C}^k(U)$ si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues sur U.

Si $f \in \mathcal{C}^k(U)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et on écrit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

3.1.1 Théorème de Schwarz

Théorème 78

Soit V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \in V$ et $g : V \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ existent sur V et sont continues au point a. Alors $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(a)$.

Démonstration. Puisque V est un ouvert, alors il existe $r > 0$ tel $B(a, r) \subset V$. On définit alors la fonction ϕ sur $B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ par

$$\phi(x, y) = g(x, y) - g(x, a_2) - g(a_1, y) + g(a_1, a_2).$$

On va montrer que $\frac{\phi(x,y)}{(x-a_1)(y-a_2)}$ admet une limite en $a = (a_1, a_2)$ et que celle-ci peut s'exprimer de deux façons. Par application du théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \phi(x, y)$ entre a_1 et x, il existe c_x entre a_1 et x tel que

$$\frac{\phi(x, y)}{(x - a_1)} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(c_x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(c_x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(c_x, a_2).$$

Par réapplication du théorème des accroissements finis, cette fois à la fonction $y \mapsto \frac{\phi(x,y)}{(x-a_1)}$ entre a_2 et y, il existe c_y entre a_2 et y tel que

$$\frac{\phi(x, y)}{(x - a_1)(y - a_2)} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}(c_x, c_y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(c_x, c_y).$$

Comme $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ est continue, on en déduit alors que

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{\phi(x, y)}{(x - a_1)(y - a_2)} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(a_1, a_2).$$

Si on reprend ce raisonnement en intervertissant l'ordre des variables, on montre de la même façon que

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{\phi(x, y)}{(x - a_1)(y - a_2)} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a_1, a_2).$$

D'où l'égalité des dérivées secondes croisées. ■

Les corollaires suivants peuvent être déduits de ce théorème.

Corollaire 79

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent au voisinage de a et sont continues en a, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Corollaire 80

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, on a alors en tout point de U

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \ 1 \leq i, j \leq n.$$

Ce résultat nous montre que la matrice des dérivées partielles d'ordre 2, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice symétrique. On l'appelle la matrice hessienne de f.
L'exemple 19 montre que l'existence des dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ d'une fonction f n'implique pas nécessairement l'égalité de ces dérivées. Le théorème de Schwarz précise que la continuité de ces dérivées suffit à assurer leur égalité.

Corollaire 81

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, on a alors en tout point de U

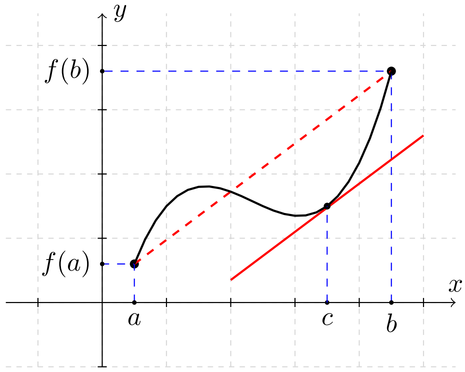
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(i_1)} \partial x_{\sigma(i_2)} ... \partial x_{\sigma(i_k)}}, \ 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n,$$

pour toute permutation σ de $\{i_1, ..., i_k\}$.

3.2 Théorème des accroissements finis

Rappelons le résultat vu au lycée et en première année.
Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Géométriquement, il existe un point c entre a et b où la tangente à la courbe de f a même pente que la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Notez que ce théorème ne garantit pas l'unicité de c.

Définition 82

Soit a et b deux points de $\mathbb{R}^n$. On appelle segment de $\mathbb{R}^n$ d'extrémités a et b, l'ensemble de $\mathbb{R}^n$ noté $[a,b]$ et défini par

$$[a,b] = \{a + t(b-a), \quad t \in [0,1]\}.$$

Cette définition généralise à $\mathbb{R}^n$ la notion bien connue de segment de $\mathbb{R}$.

Théorème 83 (Théorème des accroissements finis)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue U. Soit $a = (a_1, ..., a_n)$ et $b = (b_1, ..., b_n)$ dans U tels que le segment $[a,b]$ soit contenu dans U. Si f est différentiable en chaque point du segment ouvert $]a,b[$, alors il existe un point c de $]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b-a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i).$$

Démonstration. Il suffit de se ramener au cas connu. Soit la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \varphi(t) = f(a + t(b-a)) \end{array}.$$

La fonction φ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, donc il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = (1-0)\varphi'(t_0).$$

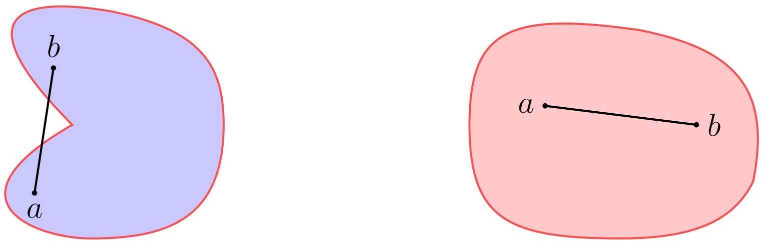
Or $\varphi(1) = b$, $\varphi(0) = a$, et par la règle de dérivation en chaîne

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b-a))(b_i - a_i).$$

Le résultat suit en posant $c = a + t_0(b-a)$. ■

Définition 84

On dit qu'un ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est *convexe* si pour tout $a, b \in U$, le segment $[a,b]$ est inclus dans U i.e. $\forall a, b \in U,\ [a,b] \subset U$.



Ensemble non convexe

Ensemble convexe

Exemple 21

- Les boules ouvertes ou fermées de $\mathbb{R}^n$ sont des ensembles convexes.
- Les sphères de $\mathbb{R}^n$ ne sont pas convexes. ▪

Corollaire 85

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. Si le gradient de f est nulle en tout point de U, alors f est constante sur U.

Démonstration. Soit x_0 un point fixé dans U et x un point quelconque de U. Il existe donc $c_x \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = \nabla f(c_x) \cdot (x - x_0).$$

Comme $\nabla f(x)$ pour tout $x \in U$, il vient $f(x) = f(x_0)$ pour tout $x \in U$. La fonction f est donc constante sur U. ■

Remarque 86

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $F : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable sur U. Alors

$$\forall a, b \in U,\ \|F(a) - F(b)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in U} \|J_F(x)\|,$$

où $J_F(x)$ est la matrice jacobienne de F.

3.3 Formule de Taylor

Ici on généralise à une fonction numérique de n variables réelles la formule de Taylor dans le cas des fonctions numériques d'une variable réelle et qu'on rappelle ci-dessous.
Si g est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle $[a, a+h]$, on a

$$g(a+h) = g(a) + \sum_{k=1}^{p} \tfrac{g^{(k)}(a)}{k!} h^k + h^p \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Soit maintenant, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur U, $a, a+h \in U$. On note

$$D^{(k)} f(a)(h)^{(k)} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}(a)\, h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k},\ k = 1, \ldots, p.$$

On a par exemple

$$k=1,\quad Df(a)(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,h_i=h\cdot\nabla f(a),$$
$$k=2,\quad D^{(2)}f(a)(h)^{(2)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\,h_ih_j=h^{\mathrm{T}}H(a)\,h,$$

où $H=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}$ est la matrice hessienne de f.

Formellement, si on pose $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$, alors par le théorème de Schwarz, on peut calculer $D^{(k)}f(a)(h)^{(k)}$ comme $(h\cdot\nabla)^k f(a)$. Par exemple si $n=2$ et $k=2$ on a

$$\begin{aligned}D^{(2)}f(a)(h)^{(2)}&=\left((h_1,h_2)\cdot\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1},\tfrac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)^2 f(a)=\left(h_1\tfrac{\partial}{\partial x_1}+h_2\tfrac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 f(a)\\&=\left(h_1^2\tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2h_1h_2\tfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+h_2^2\tfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)f(a).\end{aligned}$$

Théorème 87

Sous les conditions précédentes et en supposant que le segment $[a,a+h]$ est inclus dans U on a alors le développement de Taylor de f au voisinage de a

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{k=1}^{p}\tfrac{1}{k!}D^{(k)}f(a)(h)^{(k)}+\|h\|^p\varepsilon(h)\ \text{ avec }\ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

Démonstration. Soit la fonction

$$\begin{array}{rccl}\varphi: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & \varphi(t)=f(a+t\,h)\end{array}.$$

La fonction φ est dérivable sur $[0,1]$, donc pour avoir le résultat, il suffit d'appliquer la formule de Taylor pour les fonctions d'une variable. ■

Si $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors le développement de Taylor d'ordre 2 est

$$f(a+h)=f(a)+h\cdot\nabla f(a)+\tfrac{1}{2}h^{\mathrm{T}}H(a)\,h+\|h\|^2\varepsilon(h)\ \text{ avec }\ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0,$$

et $H=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}$ est la matrice hessienne de f.

Dans le cas particulier des fonctions de deux variables i.e. $n=2$, $a=(a_1,a_2)$ et $h=(h_1,h_2)$, le développement de Taylor d'ordre 2 est donné par la formule

$$f(a+h)=f(a)+\tfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,h_1+\tfrac{\partial f}{\partial y}(a)\,h_2+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,h_1^2+2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\,h_1h_2+\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\,h_2^2\right)+\|h\|^2\varepsilon(h),$$

avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

Exemple 22

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = e^{x+y}$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Le développement d'ordre 2 en $(0, 0)$ est

$$e^{x+y} \simeq 1 + h_1 + h_2 + \frac{1}{2}\left(h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2\right). \qquad \blacksquare$$

3.3.1 Points critiques et extrema libres

Dans ce paragraphe U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ et $a \in U$. On s'intéresse aux extrema de f.

Définition 88 (Points critiques)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On dit que $a \in U$ est un point *critique*, ou singulier, ou stationnaire, de f si toutes les dérivées partielles de f sont nulles en a, c'est-à-dire

$$\nabla f(a) = 0.$$

Cette définition s'étend aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ en remplaçant $\nabla f(a)$ par $J_F(a)$.

Définition 89

On dit que f admet un *minimum local* en a s'il existe un voisinage V de a tel que

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in V.$$

On dit que f admet un *minimum global* ou *absolu* en a si $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in U$.

On définit de la même manière les notions de maximum local et global en remplaçant $\leq$ par $\geq$.

On utilise le nom *extremum* pour désigner sans distinction un maximum ou minimum.

On dit qu'un extremum est strict si les inégalités précédentes sont strictes.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum

Théorème 90 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum)

Si f est différentiable sur U et qu'elle présente en $a \in U$ un extremum local ou global alors a est un point critique de f, i.e. $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration. Supposons que cet extremum est un minimum. L'hypothèse faite sur f implique qu'il existe une boule ouverte $B(a, r)$ telle que $f(a) \leq f(x) \ \forall x \in B(a, r)$.

Pour h fixé dans $\mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in B(a, r)$, on définit la fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ par $\varphi(t) = f(a + t\,h)$.

On a $\varphi(0) = f(a) \leq f(a + t\,h) = \varphi(t)\ \ \forall t \in]-1, 1[$. Ce qui implique que $\varphi'(0) = 0$.

Comme $\varphi'(t) = \nabla f(a + t\,h) \cdot h$, alors $\nabla f(a) \cdot h = 0$ pour tout h fixé tel que $\|h\| < r$.

Si $k \neq 0$ un point quelconque de $\mathbb{R}^n$, alors en choisissant $h = \frac{rk}{2\|k\|}$, on obtient $\nabla f(a) \cdot \frac{rk}{2\|k\|} = 0$, ce qui implique que $\nabla f(a) \cdot k = 0$.

Comme k est quelconque dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on conclut que $\nabla f(a) = 0$. ■

Remarquons que la nullité de la différentielle constitue une condition nécessaire mais non suffisante d'existence d'un extremum. En effet, soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3$. Un calcul simple montre que $\nabla f(0, 0) = 0$.

D'autre part, on a

$$-h^3 = f(-h, 0) < f(0, 0) < f(h, 0) = h^3\ \forall h \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ce qui montre que f n'admet pas d'extremum en $(0, 0)$.

Le théorème précédent dit alors que les extrema d'une fonction différentiable, quand ils existent, sont à chercher parmi ses points critiques, c'est-à-dire parmi les solutions de l'équation

$$\nabla f(x) = 0, x \in U.$$

Condition suffisante d'existence d'un extremum

Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$ un point critique de f. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|h\|$ est suffisamment petit, on a

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} h^{\mathsf{T}} H(a)\, h + \|h\|^2 \varepsilon(h),$$

où $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice hessienne de f qui est symétrique.

Le terme $\frac{1}{2} h^{\mathsf{T}} H(a)\, h = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j$ c'est la forme quadratique associée à la matrice hessienne $H(a)$ de f en a. On rappelle qu'une matrice symétrique se diagonalise dans une base orthonormée et que toutes ses valeurs propres sont réelles.

En notant $(v_1, ..., v_n)$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la base orthonormée et les valeurs propres pour la matrice $H(a)$, et en décomposant h suivant cette base $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, on obtient l'expression plus simple $h^{\mathsf{T}} H(a)\, h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i$. On peut à partir de cette remarque obtenir une condition suffisante pour avoir un extremum au point a.

Théorème 91

Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$ un point critique de f.

- Si les λ_i sont tous strictement positifs alors f admet un minimum local au point a.
- Si les λ_i sont tous strictement négatifs alors f admet un maximum local au point a.

Dans le cas $n = 2$ la matrice hessienne est de taille 2×2 et il est particulièrement facile de vérifier le signe des λ_1 et λ_2 en remarquant que le déterminant $H(a)$ vaut $\lambda_1 \lambda_2$ et que la trace $tr(H(a))$ vaut $\lambda_1 + \lambda_2$.

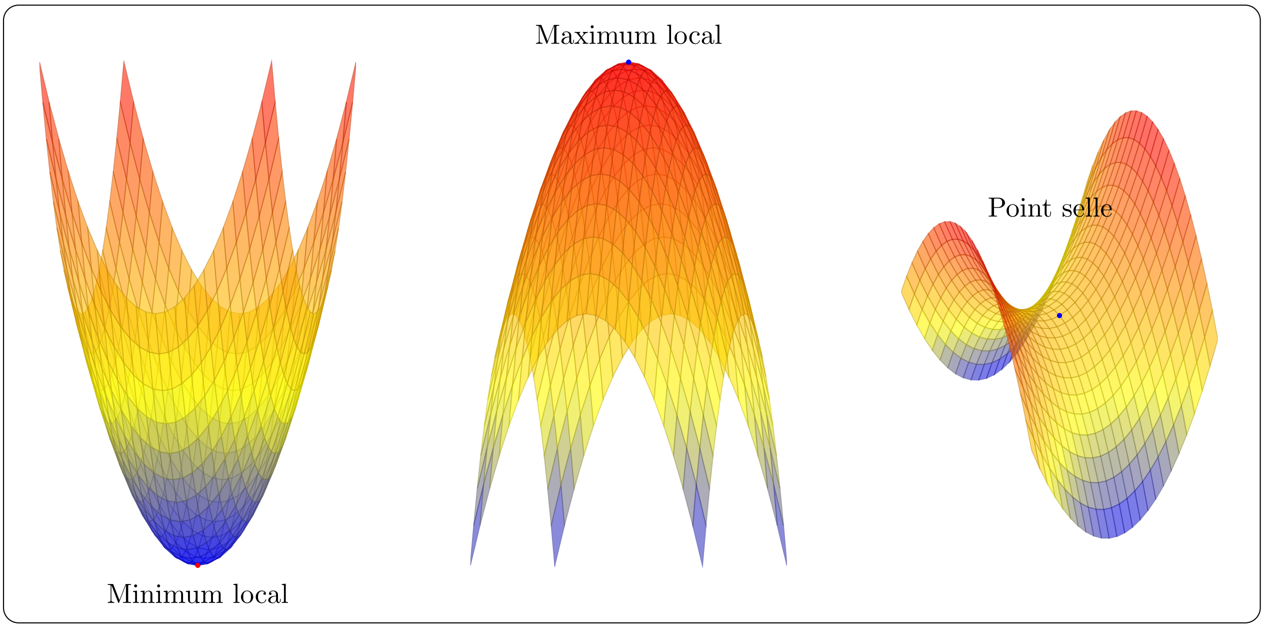
Théorème 92

Soit U un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$ un point critique de f, i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$. Alors, avec les notations de Monge

$$p = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad q = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a),$$

on a

1. Si $pr - q^2 > 0$ et $p > 0$: f admet en a un minimum local.
2. Si $pr - q^2 > 0$ et $p < 0$: f admet en a un maximum local.
3. Si $pr - q^2 < 0$: f n'admet en a ni maximum ni minimum local, mais un point selle.
4. Si $pr - q^2 = 0$: on ne peut conclure a priori.



Exemple 23

Étudier l'existence des extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3x^3+3y^3-x-y$.
Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Un simple calcul donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2-1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 9y^2-1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 18x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 18y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

Les points critiques de f sont les solutions du système $\{9x^2-1=0,\ 9y^2-1=0\}$.
Le système admet donc 4 solutions qui sont

$$s_1 = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right),\ s_2 = \left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right),\ s_3 = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right),\ s_4 = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right).$$

- En s_1 on a $pr - q^2 = 36 > 0$ et $p = 6 > 0$: f présente donc en s_1 un minimum local.
- En s_2 et s_3 on a $pr - q^2 = -36 < 0$: f n'admet d'extremum en aucun de ces deux points.
- En s_4 on a $pr - q^2 = 36 > 0$ et $p = -6 < 0$: f présente donc en s_4 un maximum local. ∎

3.4 Théorème des fonctions implicites

Un résultat classique pour les fonctions d'une variable affirme que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $f'(x_0) \neq 0,\ x_0 \in I$, alors f est strictement monotone sur un un voisinage $I_0 \subset I$ de x_0 et est une bijection entre les intervalles I_0 et $f(I_0)$. De plus la bijection réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Ce résultat se généralise en dimension supérieure à un théorème appelé le théorème d'inversion locale.

Théorème 93 (Théorème d'inversion locale)

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et soit $x \in U$ telle que la matrice jacobienne $J_F(x)$ est inversible. Alors il existe deux ouverts, $U' \subset U$ et V tels que $x \in U'$ et $f(x) \in V$ et tels que f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U' dans V.

Une application du théorème d'inversion locale concerne le problème suivant : pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, on considère l'équation $f(x,y) = 0$ et on cherche à comprendre si cette équation est en un certain sens équivalente à $y = g(x)$ où g est une fonction d'une variable. L'exemple de la fonction $f(x,y) = x^2+y^2-1$ nous montre que ceci n'est possible que localement : certaines portions du cercle unité s'identifient au graphe de la fonction $y = \sqrt{1-x^2}$, d'autres à celui de la fonction $y = -\sqrt{1-x^2}$. D'autre portions, telles qu'au voisinage du point $(1,0)$ ne peuvent s'identifier à un graphe. Le théorème des fonctions implicites donne un résultat général allant dans ce sens.

Théorème 94 (Théorème des fonctions implicites dans $\mathbb{R}^2$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, (a,b) un élément de U, f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. On suppose que
1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
2) $f(a,b)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$.
Alors il existe un intervalle ouvert I contenant a, un intervalle ouvert J contenant b et une fonction φ unique de I dans J de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifiant
$I\times J\subset U,\quad \varphi(a)=b,\quad f(x,\varphi(x))=0\ \forall x\in I$ et $\varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème peut s'effectuer en considérant la fonction $h(x,y)=(x,f(x,y))$ et en lui appliquant le théorème d'inversion locale qui permet de définir $(x,g(x))$ comme l'antécédent de $(x,0)$. ■

Exemple 24

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=e^{y-1}+y-x$. Montrer que la relation $f(x,y)=0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point $(2,1)$.
Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. D'autre part on a $f(2,1)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{y-1}+1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=2\neq 0$. Il existe donc un intervalle ouvert I contenant 2, un intervalle ouvert J contenant 1 et une fonction $\varphi:I\to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifiant $\varphi(2)=1$, $f(x,\varphi(x))=0\ \forall x\in I$ et $\varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}=\frac{1}{e^{\varphi(x)-1}+1}$. ■

Le théorème des fonctions implicite se généralise aux fonctions de plus de deux variables.

Théorème 95 (Théorème des fonctions implicites dans $\mathbb{R}^{n+1}$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, $(a,b)\in U$, où $a=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f:\ U\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} &\to\mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto f(x,y)\end{aligned}$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On suppose $f(a,b)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$.
Alors il existe un pavé ouvert A contenant a, un intervalle ouvert J contenant b et une fonction unique $\varphi:A\to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et vérifiant
$A\times J\subset U,\quad \varphi(a)=b,\quad f(x,\varphi(x))=0\ \forall x\in A$ et $\nabla\varphi(x)=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,\varphi(x)),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x,\varphi(x))\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$.

3.4.1 Extrema liés

On s'est déjà intéressé à l'étude des extrema d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Dans de nombreuses applications, il est fréquent que l'on cherche à minimiser ou maximiser f sur un sous-ensemble restreint ce qui correspond à imposer une contrainte sur la variable x.

Définition 96 (Lagrangien)
On cherche les extrema de la fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ avec $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Le Lagrangien associé au problème est la fonction de 3 variables et de classe $\mathcal{C}^1$

$$\begin{array}{rccl} L: & U \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, \lambda) & \mapsto & f(x, y) + \lambda g(x, y), \end{array}$$

La variable λ est appelée multiplicateur de Lagrange.

Dans le cas général, on a à optimiser

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, ..., x_n), \end{array}$$

sous p contraintes $(p \leq n)$: $g_i(x_1, ..., x_n) = 0, \; i = 1, ..., p.$
Il y a alors p multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, ..., \lambda_p$ et le Lagrangien associé est la fonction de $(n+p)$ variables $L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_p) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x_1, ..., x_n)$.

Théorème 97 (de Lagrange dans $\mathbb{R}^2$)
Pour que f admette en (x_0, y_0) un extremum local sous la contrainte $g(x, y) = 0$, le point (x_0, y_0) n'étant pas un point critique de g, il faut qu'il existe λ_0 tel que (x_0, y_0, λ_0) soit un point critique du Lagrangien L i.e. $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$.

Le théorème de Lagrange n'est pas un théorème d'existence des extrema liés d'une fonction ; il dit simplement que, dans le cas où la fonction f admet un extremum lié, cet extremum est à chercher parmi les solutions du système $\nabla f = \lambda \nabla g$.

Exemple 25
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^4 + y^2 - 5x^2$. Déterminons les extrema de f sachant que x, y sont liées par la relation $g(x, y) = x + y = 0$.

Les points qui vérifient la condition nécessaire de Lagrange sont des solution du système

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right\},\ \text{i.e. } 4x^3-10x=\lambda \text{ et } 2y=\lambda.$$

D'où $(x_0,y_0,\lambda_0)=(0,0,0)\,,\,(2,-2,-4)$ ou $(-2,2,4)$.

Observons que $f\,(x,-x)=x^2\,(x^2-4)$, alors que le point $(0,0)$ qui est un minimum local lié. ■

Ce théorème se généralise aux fonctions de plus de deux variables sous plusieurs contraintes.

Théorème 98 (de Lagrange dans $\mathbb{R}^n$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $x_0\in U$ un extremum local de f sous les contraintes $g_i\,(x)=0,\ i=1,...,p$. On suppose que les vecteurs $\nabla g_1\,(x_0)\,,\nabla g_2\,(x_0)\,,...,\nabla g_p\,(x_0)$ sont linéairement indépendants. Alors, il existe des réels $\lambda_i,\ i=1,...,p$, multiplicateurs de Lagrange tels que

$$\nabla f\,(x_0)=\lambda_1\nabla g_1\,(x_0)+\lambda_2\nabla g_2\,(x_0)+...+\lambda_p\nabla g_p\,(x_0)\,.$$

Chapitre 4

Intégration des fonctions de plusieurs variables

Sommaire

Le but de ce chapitre est de présenter le calcul des intégrales multiples, précisément, intégrales doubles et triples.

4.1 Introduction et définitions générales

Il y a deux aspects essentiels dans le cours du calcul d'intégrales. Le premier est la théorie d'intégration, qui comporte les définitions et les conditions nécessaires d'existence d'une intégrale et certains résultats liés à celle-ci. Nous classons deux théories fondamentales, revenant à leurs constructeurs Lebesgue et Riemann. La théorie de Lebesgue sera enseignée dans un cours séparé appelé "mesure et intégration" et dans notre cours, nous étudions la théorie de Riemann.
Le deuxième aspect est le côté de calcul et ses techniques que nous nous concentrions sur lui dans ce cours.

4.1.1 Notion de pavé

Définition 99 (de pavé)

On appelle pavé de $\mathbb{R}^n$ tout sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$P = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n) \equiv \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \,,$$

où a_i et b_i sont des constantes réelles données.

Les intervalles (a_i, b_i) peuvent être considérés fermés, ouverts, ou semi-ouverts.
Pour $n = 1$, P est un intervalle de $\mathbb{R}$, pour $n = 2$, P est un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et pour $n = 3$, P est un parallélépipède de $\mathbb{R}^3$.

Définition 100

Soit P un pavé de $\mathbb{R}^n$. $m(P) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n) \in \mathbb{R}_+$ est appelé mesure de P.

Définition 101

On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$ toute suite (t_i) finie telle que

$$a = t_0 < t < ... < t_k = b.$$

On appelle subdivision S du pavé P toute famille $(S_1, ..., S_n)$ où $S_i = \{t_{i,0}, ..., t_{i,k_i}\}$ est une subdivision de l'intervalle $[a_i, b_i]$.

L'ensemble des sous pavés $[t_{1,s_1}, t_{1,s_1+1}] \times [t_{2,s_2}, t_{2,s_2+1}] \times ... \times [t_{n,s_n}, t_{n,s_n+1}]$ lorsque $(s_1, ..., s_n)$ parcourt $\{0, ..., k_1 - 1\} \times ... \times \{0, ..., k_n - 1\}$ forme une partition de P.

Comme dans le cas unidimensionel, on dit qu'une subdivision S_2 est plus fine que S_1 si tout sous pavé de S_1 est l'union de plusieurs sous pavés de S_2.

4.1.2 Ensembles mesurables dans $\mathbb{R}^n$

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ alors A est contenu dans un pavé P de $\mathbb{R}^n$.

Mesure extérieure de A est défini comme étant

$$m^* (A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} m (P_k) : \ (P_k) \text{ est une suite de pavés avec } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k \right\}.$$

D'une manière analogue, nous définissons la mesure intérieure comme

$$m_* (A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} m (P_k) : \ (P_k) \text{ est une suite de pavés avec } \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k \subset A \right\}.$$

Définition 102 (Ensemble mesurable)

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite mesurable si $m^* (A) = m_* (A)$.

On appelle alors mesure de A le nombre $m (A)$ définie par $m (A) = m^* (A) = m_* (A)$.

Pour $n = 2$, $m (A)$ s'appelle aire ou surface de A et pour $n = 3$, $m (A)$ s'appelle volume de A. La mesure d'un ensemble dépend de la dimension de l'espace dans lequel il est considéré. Par exemple, la mesure d'un rectangle $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ considéré comme partie de $\mathbb{R}^2$ est égale à sa surface $m_2 (R) = (b_1 - a_1) (b_2 - a_2)$. Mais si l'on considère ce rectangle comme étant une partie de $\mathbb{R}^3$, i.e. $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \{0\}$ alors $m_3 (R) = 0$ dans $\mathbb{R}^3$, car son volume est nul.

Proposition 103

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Alors A est mesurable si et seulement si la mesure de sa frontière est nulle.

4.1.3 Sommes de Darboux

Soit $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un pavé de $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est bornée sur le pavé P. Soit S une subdivision de P. Pour tout sous pavé S_k de S on pose

$$m_{S_k} (f) = \inf \{f (x) , \ x \in S_k\} \quad \text{et} \quad M_{S_k} (f) = \sup \{f (x) , \ x \in S_k\} .$$

Ces nombres existent et sont finis car f est bornée.

Définition 104 (Sommes de Darboux)
Les sommes

$$L(f,S)=\sum_{S_k} m_{S_k}(f)\,m(S_k) \quad \text{et} \quad U(f,S)=\sum_{S_k} M_{S_k}(f)\,m(S_k)$$

sont appelés respectivement somme de Darboux inférieure et somme de Darboux supérieure.

Propriétés

1. Si S et S' deux partions quelconque d'une pavé P de $\mathbb{R}^n$, alors $L(f,S') \leq U(f,S)$.
2. L'ensemble $\mathcal{S}_* = \{L(f,S)\,,\;\; S \text{ partition quelconque de } P\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$ elle admet donc, une borne supérieure notée I_+.
3. L'ensemble $\mathcal{S}^* = \{U(f,S)\,,\;\; S \text{ partition quelconque de } P\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure notée I^-.

4.1.4 Fonctions intégrables sur une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$

Définition 105 (Intégrale sur un pavé)
Une fonction $f: P \to \mathbb{R}$, définie et bornée sur un pavé fermé P de $\mathbb{R}^n$ est dite intégrable sur P si $I_+ = I^-$. Son intégrale sur P est alors le nombre $I = I_+ = I^-$. On la note $\int_P f(x)\,dx$.

Théorème 106 (Critère d'intégrabilité)
Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f: P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur P. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit intégrable sur A est

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ il existe une partition } S \text{ de } P \text{ telle que } U(f,S) - L(f,S) < \varepsilon.$$

Théorème 107 (Intégrabilité des fonctions continues)
Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f: P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur P. Alors la fonction f est intégrable sur P si et seulement si l'ensemble $B = \{x \in P,\ f \text{ est discontinue en } x\}$ est de mesure nulle. En particulier si f est continue sur P, alors elle est intégrable sur P.

Avant de généraliser l'intégrale d'une fonction f à un domaine quelconque, on définit la fonction caractéristique d'une partie A de $\mathbb{R}^n$, par la fonction $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Théorème 108

Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ tel que $A \subset P$. La fonction $\chi_A : P \to \mathbb{R}$ est intégrable sur P si et seulement si la frontière de A est de mesure nulle.

Définition 109 (Intégrale sur une partie mesurable quelconque)

Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie et bornée sur un ensemble mesurable A de $\mathbb{R}^n$ tel que $A \subset P$. On définit l'intégrale de f sur A comme l'intégrale de $f \cdot \chi_A$ sur P i.e. $\int\limits_A f(x)\,dx = \int\limits_P f(x)\,\chi_A(x)\,dx$.

Propriétés de l'intégrale multiple

- L'ensemble des fonctions intégrables sur une partie mesurable A de $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel et
$$\int\limits_A (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int\limits_A f(x)\,dx + \mu \int\limits_A g(x)\,dx.$$
- Soit $f \geq 0$ et intégrable sur A alors $\int\limits_A f(x)\,dx \geq 0$.
- Si f est intégrable sur A alors $|f|$ est intégrable sur A et $\left|\int\limits_A f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_A |f(x)|\,dx$.
- Soient A et B deux parties mesurables de $\mathbb{R}^n$ telles que $m(A \cap B) = 0$ et f intégrable sur A et B alors f est intégrable sur $A \cup B$ et
$$\int\limits_{A \cup B} f(x)\,dx = \int\limits_A f(x)\,dx + \int\limits_B f(x)\,dx.$$
- L'intégrale de la constante 1 sur une partie mesurable A de $\mathbb{R}^n$ donne la mesure de A i.e. $\int\limits_A 1dx = m(A)$.
- L'intégrale d'une fonction sur une partie de mesure nulle est toujours nulle.

La démonstration de ces propriétés est basée essentiellement sur la définition de l'intégrale multiple et les propriétés du sup et de l'inf.

Théorème de Fubini

Maintenant nous arrivons à un résultat important qui aide à calculer des intégrales lorsqu'elles existent. Ce résultat est le théorème de Fubini qui offre un moyen de ramener le calcul des intégrales multiples à celui des intégrales des fonctions d'une variable. Une version élémentaire de ce théorème s'énonce pour les fonctions définies sur un pavé.

Théorème 110 Théorème de Fubini

Soient A et B deux pavés respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Si $f : A \times B \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $A \times B$, alors on a

$$\int_{A\times B} f(x,y)\, dxdy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\, dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Changement de variables

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) : A \to \mathbb{R}^n$ une fonction injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble A. Si f est une fonction intégrable sur $\varphi(A)$, on va chercher à relier l'intégrale de f sur $\varphi(A)$ à celle de $f \circ \varphi$ sur A.

Théorème 111 (Formule de changement de variables)

Sous les conditions ci-dessus, on a

$$\int_{\varphi(A)} f(x)\, dx = \int_A (f\circ\varphi)(y) \left| \det (J_\varphi(y)) \right| dy$$

où $J_\varphi(y)$ est la matrice jacobienne de φ définie par $J_\varphi(y) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y) \right)_{1 \le i,j \le n}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & f\circ\varphi & & \\ A \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \varphi(A) \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R} \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ y & & x = \varphi(y) & & f(x) = (f\circ\varphi)(y) \end{array}$$

4.2 Intégrales doubles

Une version plus simple du théorème de Fubini pour les fonctions de deux variables est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 112

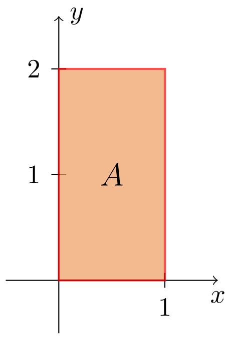
Soit $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un pavé de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction intégrable sur P. Alors

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

De plus si $f(x,y) = h(x)\,g(y)$ alors

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} h(x)\,dx\right)\left(\int\limits_{a_2}^{b_2} g(y)\,dy\right).$$

Exemple 26



Calculons l'intégrale $I = \iint\limits_A e^{x+y}dxdy$ où $A = [0,1] \times [0,2]$.

On a

$$I = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} e^x e^y dxdy = \left(\int\limits_0^1 e^x dx\right)\left(\int\limits_0^2 e^y dy\right) = (e-1)\left(e^2-1\right).$$

■

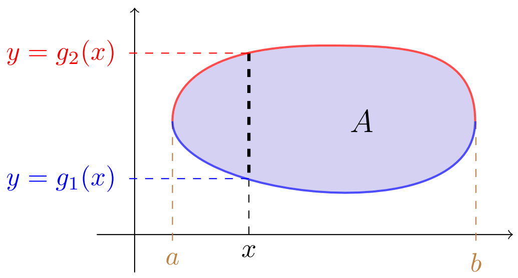
Le résultat du théorème ci-dessus est un cas particulier du résultat suivant.

Théorème 113

Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ où $g_1, g_2 \in \mathcal{C}[a,b]\}$ et f une fonction intégrable sur A.

Alors

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b\left(\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

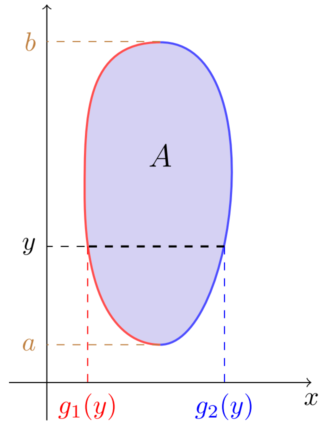


Si l'ensemble A est donné sous la forme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq y \leq b,\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \ \text{ où } g_1, g_2 \in \mathcal{C}\,[a, b]\right\},$$

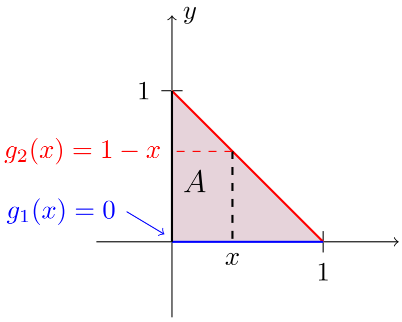
alors

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$



Exemple 27

Calculons l'intégrale suivante $I = \iint\limits_A x^2 y dxdy$ où A est le triangle des sommets $B_1 = O = (0,0), B_2 = (1,0)$ et $B_2 = (0,1)$. L'ensemble A s'exprime sous la forme



$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\right\}.$$

En appliquant le théorème de Fubini on obtient

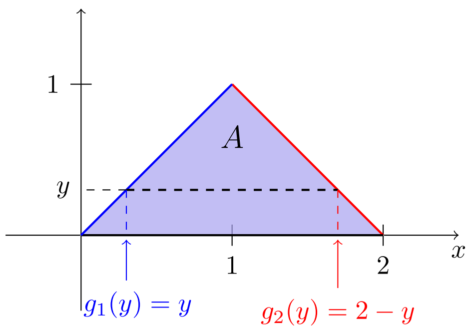
$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} x^2 y dy \right) dx = \int\limits_0^1 \tfrac{1}{2} x^2 (x-1)^2\, dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) dx = \left[\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1 = \tfrac{1}{60}. \end{aligned}$$

■

Exemple 28

Calculons l'intégrale $I = \iint\limits_A (x + y)\, dxdy$ où A est le triangle des sommets $B_1 = O = (0,0)$, $B_2 = (2,0)$ et $B_2 = (1,1)$. D'après le graphe, l'ensemble A peut être exprimé sous forme

$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 2 - y\right\}.$



Alors en appliquant le théorème de Fubini on

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_y^{2-y} (x + y)\, dx \right) dy = \int\limits_0^1 \left(2 - 2y^2\right) dy = \frac{4}{3}.$$

■

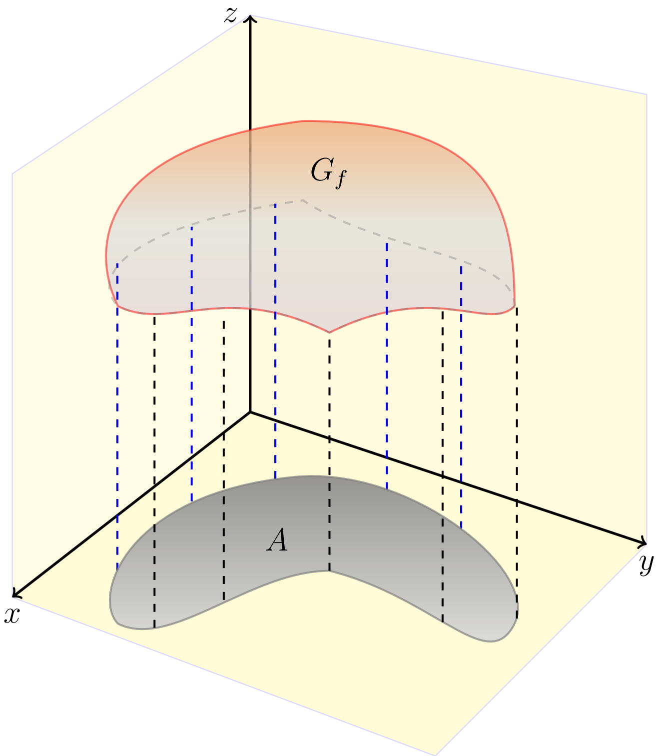
4.2.1 Interprétation géométrique d'une intégrale double

Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur A. Le graphe de f est

$$G_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (x, y) \in A \text{ et } z = f(x, y)\right\}.$$

L'intégrale $I = \iint_A f(x, y)\, dxdy$ s'interprète comme le volume V du corps délimité par A, la surface G_f et et la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et s'appuient sur la frontière de A.

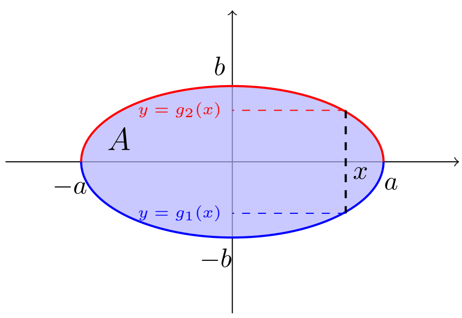
Lorsque f est la fonction constante qui vaut 1, l'intégrale $I = \iint_A 1 dxdy = m(A)$ représente l'aire, ou la surface du domaine A.



Exemple 29

Calculons l'aire du domaine délimité par l'ellipse centrée en $O = (0, 0)$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$.

Le domaine $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ on peut le décrire par



$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ -a \leq x \leq a \text{ et } g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \text{ où } g_2(x) = -g_1(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right\}.$$

En appliquant le théorème de Fubini on a

$$m(A) = \iint\limits_A 1dxdy = \int\limits_{-a}^{a} \left(\int\limits_{-g(x)}^{g(x)} dy \right) dx = \int\limits_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{a^2}}dx.$$

Par le changement de variable $x = a \sin t$ on voit que l'air de l'ellipse est $m(A) = \pi ab$. ∎

Théorème 114 (Théorème de la moyenne)

Soit A un ensemble convexe mesurable de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur A, alors il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que $f(x_0, y_0)$ égal à la valeur moyenne de f sur A i.e. $f(x_0, y_0) = \frac{1}{m(A)} \iint\limits_A f(x, y)\, dxdy$ où $m(A) = \iint\limits_A 1dxdy$.

4.2.2 Changement de variables dans les intégrales doubles

Théorème 115 (Formule de changement de variables)

Soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & A & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \longmapsto & (x, y) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \end{array}$$

une fonction injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A telle que $\det(J_\varphi(u, v)) \neq 0$ où $J_\varphi(u, v)$ est la matrice jacobienne de φ définie par $J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix}$.
Si f est une fonction intégrable sur $\varphi(A)$, alors

$$\iint\limits_{\varphi(A)} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_A f \circ \varphi(u, v) \left| \det(J_\varphi(u, v)) \right| dudv.$$

$$\begin{tikzcd} A \subset \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)"] \arrow[rr, bend left, "f \circ \varphi"] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & \varphi(A) \subset \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & \mathbb{R} \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] \\ (u, v) & (x, y) = \varphi(u, v) & f(x, y) = (f \circ \varphi)(u, v) \end{tikzcd}$$

Changement en coordonnées polaires

Si le domaine ou la fonction est en x^2+y^2, le calcul d'intégrale est souvent plus facile en passant en coordonnées polaires, via l'application injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D = \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}.$$

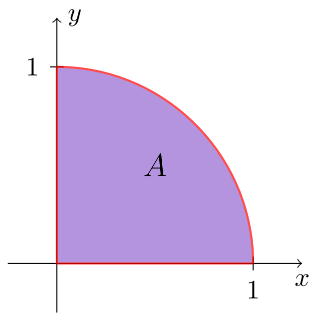
Une première étape consiste en la récriture du domaine d'intégration A pour les couples (x, y) en un domaine $B = \varphi^{-1}(A)$ pour les couples (r, θ). Puisque le Jacobien $\det(J_\varphi(r, \theta))$ est

$$\det(J_\varphi(r, \theta)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

on a donc

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_B f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta.$$

Exemple 30



Calculons l'intégrale $I = \iint\limits_A xydxdy$ où

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\right\}.$$

On a

$$B = \varphi^{-1}(A) = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\text{ tel que } 0 < r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

D'où

$$I = \iint\limits_A xydxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\theta \sin\theta r drd\theta = \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{8}. \qquad \blacksquare$$

4.3 Intégrales triples

Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^3$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur A. On notera l'intégrale triple de f sur A par $\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz$. Le principe des intégrales triples est le même que pour les intégrales doubles, c'est pourquoi nous allons reprendre le cadre de la section précédente.

4.3.1 Théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$

Le théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$ permet de ramener le calcul d'une intégrale triple à celui d'intégrales doubles et ainsi grâce au théorème analogue énoncé dans $\mathbb{R}^2$, à celui d'intégrales simples.

Il peut avoir différentes formulations suivant la forme du domaine d'intégration A de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 116

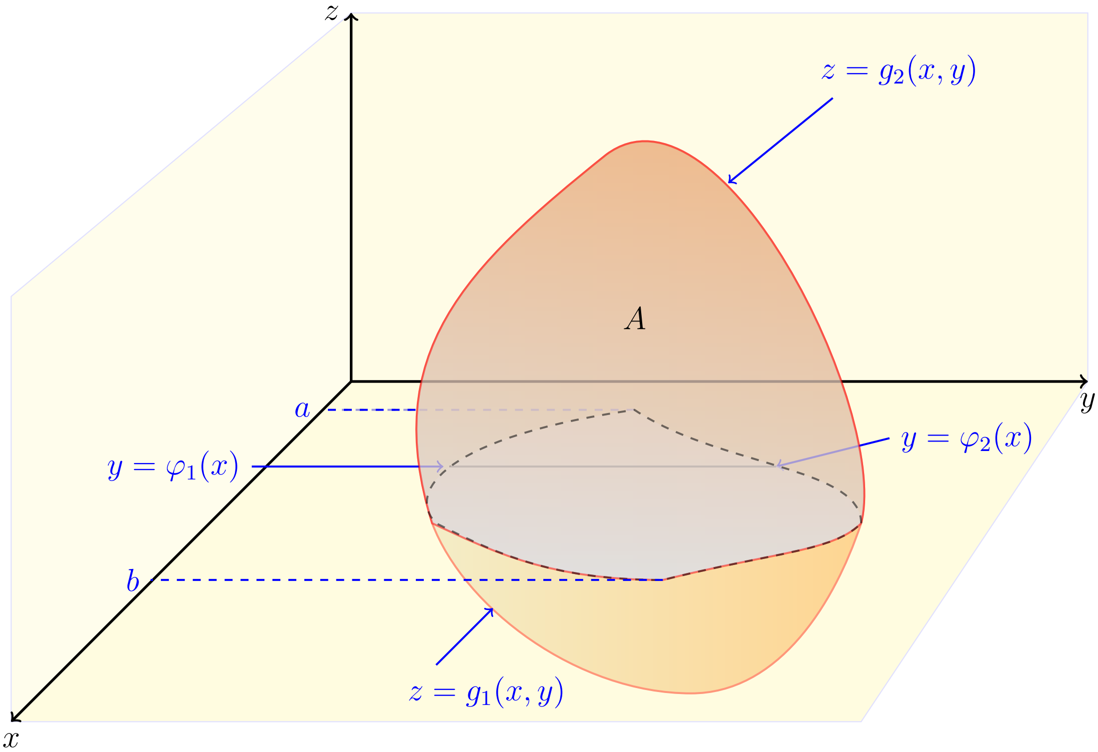
Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \text{ et } (x, y) \in B \subset \mathbb{R}^2\}$, où B est une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$ et les fonctions g_1 et g_2 sont continues sur B. Si f est une fonction intégrable sur A alors

$$\iiint_A f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_B \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy.$$

De plus si $B = \{(x, y) \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \text{ et } a \leq x \leq b\}$ alors

$$\iiint_A f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

En particulier si $f(x, y, z) = 1$ sur A, l'intégral $\iiint_A 1 dxdydz$ représente alors le volume de A.



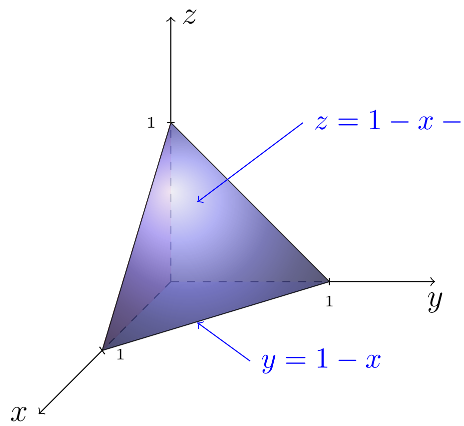
Remarque 117

- Noter que l'ensemble B est la projection de A sur le plan xOy et l'intervalle $[a,b]$ est la projection de B sur l'axe des x.
- Pour calculer l'intégrale triple d'une fonction intégrable sur un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^3$, on peut procéder dans l'ordre des variables que l'on veut, toutes donnant le même résultat.

Exemple 31

Soit $A = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ x+y+z \leq 1\right\}$.
Calculons l'intégrale $\iiint\limits_A \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dxdydz$.
Le domaine de l'intégration A peut être exprimé comme

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1-x-y, \\ 0 \leq y \leq 1-x \text{ et } 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}.$$



D'après le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} \iiint\limits_A \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x+y} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\operatorname{Log}(2) - \frac{1}{2}(1-x) - \operatorname{Log}(1+x) \right) dx = \frac{3}{4} - \operatorname{Log} 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple 32

Calculons le volume de l'ensemble $A = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ x+y+z \leq 1\right\}$ de l'exemple précédent.

Le volume $m(A)$ de A est l'intégrale de la fonction constante $f \equiv 1$ sur l'ensemble A.

On a

$$\begin{aligned} m(A) = \iiint\limits_A 1 dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2 dx = \frac{1}{6}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.3.2 Changement de variables dans $\mathbb{R}^3$

Théorème 118 (Formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^3$)
Soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^3$ et

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : & A & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v, w) & \longmapsto & (x, y, z) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) \end{array}$$

une fonction injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A telle que $\det(J_\varphi(u, v, w)) \neq 0$ où $J_\varphi(u, v, w)$ est la matrice jacobienne de φ définie par $J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial w} \end{bmatrix}$.

Si f est une fonction intégrable sur $B = \varphi(A)$, alors

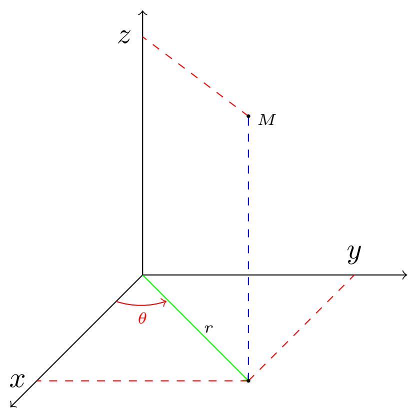
$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\varphi^{-1}(B)} f \circ \varphi(u, v, w) \left|\det(J_\varphi(u, v, w))\right| dudvdw.$$

$$\begin{tikzcd} A \subset \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)"] \arrow[rr, bend left, "f \circ \varphi"] & \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \Cup & \Cup & \Cup \\ (u, v, w) & (x, y, z) = \varphi(u, v, w) & f(x, y, z) = (f \circ \varphi)(u, v, w) \end{tikzcd}$$

Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques d'un point $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont définies par le changement de variables

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta, z) & \longmapsto & (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z). \end{array}$$



La matrice jacobienne de φ dans ce cas est donnée par

$$J_\varphi(r,\theta,z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

et donc $\left|\det\left(J_\varphi(r,\theta,z)\right)\right|=r$. Si $\varphi(A)=B$ alors

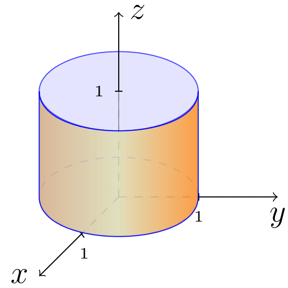
$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{\varphi^{-1}(B)} f(r,\theta,z)\,rdrd\theta dz.$$

Exemple 33

Calculons $I=\iiint\limits_A z^{x^2+y^2}dxdydz$ où

$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2\leq 1 \text{ et } 0\leq z\leq 1\right\}$.

On utilise le changement de variables en coordonnées cylindriques. On a



$$\varphi^{-1}(A)=\left\{(r,\theta,z),\ 0<r\leq 1,\ 0\leq\theta<2\pi \text{ et } 0\leq z\leq 1\right\},$$

et alors

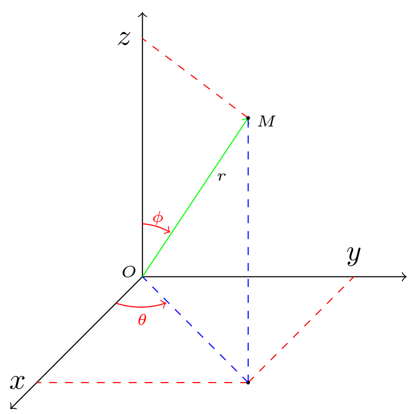
$$\begin{aligned}I&=\iiint\limits_A z^{x^2+y^2}dxdydz=\iiint\limits_{\varphi^{-1}(A)} z^{r^2}rdrd\theta dz=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^1 z^{r^2}rdz\right)dr\right)d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\tfrac{r}{r^2+1}\right)dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(2)\,d\theta=\pi\operatorname{Log}(2).\end{aligned}$$

■

Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques de $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ sont définies à partir de la distance r de M à l'origine O, de l'angle θ comme en cylindriques et de l'angle ϕ entre l'axe des z et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Elles sont définies par le changement de variables



$$\begin{aligned}\varphi:\ \mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\times[0,\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ (r,\theta,\phi) &\longmapsto (x,y,z)=(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi).\end{aligned}$$

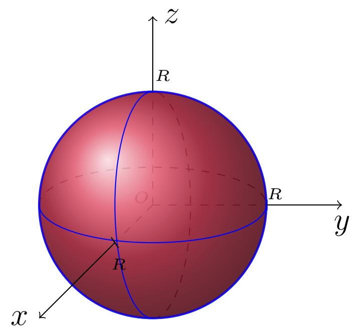
La matrice jacobienne de φ pour le changement en coordonnées sphériques est

$$J_\varphi(r,\theta,\phi)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi\end{bmatrix}.$$

Par conséquent $\left|\det\left(J_{\varphi}\left(r,\theta,z\right)\right)\right| = r^2\sin\phi$. Alors on a

$$\iiint\limits_{B} f\left(x,y,z\right)dxdydz = \iiint\limits_{\varphi^{-1}(B)} f\left(r,\theta,z\right)r^2\sin\phi drd\theta d\phi.$$

Exemple 34



Calculons $I = \iiint\limits_{A}\left(1+a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz$ où $a\in\mathbb{R}$ et $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$. On a

$$\varphi^{-1}\left(A\right) = \left\{\left(r,\theta,\phi\right),\ 0<r\leq R,\ 0\leq\theta<2\pi \text{ et } 0\leq\phi<\pi\right\}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{A}\left(1+a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz = \iiint\limits_{\varphi^{-1}(A)}\left(1+a\ r\right)r^2\sin\phi drd\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(\left(1+a\ r\right)r^2\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi\right)dr\right)d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(1+a\ r\right)r^2dr\right)d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(1+a\ r\right)r^2dr\right)d\theta = \pi R^3\left(\tfrac{4}{3}+a\ R\right).
\end{aligned}$$

Si $a=0$, l'intégrale $I=\frac{4}{3}\pi R^3$ représente le volume de la partie délimité par la sphère centrée à l'origine et de rayon R. ∎

Chapitre 5

Formes différentielles, intégrales curviligne et de surface

Sommaire

5.1 Formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$

5.1.1 Formes multilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$

Définition 119 (Forme p-linéaire)

On dit que l'application $f : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*$ est une forme p-linéaire ou multilinéaire d'ordre p (lorsque $p = 2$, on dit bilinéaire) si elle est linéaire en chaque variable, c'est-à-dire pour $u_i, v_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, ..., p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

$$f(u_1, ..., u_{i-1}, \lambda u_i + \mu v_i, u_{i+1}, ..., u_p) =$$
$$\lambda f(u_1, ..., u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, ..., u_p) + \mu f(u_1, ..., u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, ..., u_p).$$

Définition 120 (Forme p-linéaire alternée)

Une forme p-linéaire est dite *alternée* si elle change de signe lorsqu'on échange deux vecteurs, c'est-à-dire pour $v_i, v_j \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i < j \leq p$ on a

$$f(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ...v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, ..., v_p) = -f(v_1, ..., v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, ...v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, ..., v_p).$$

Notation 3

On désignera par $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'espace des formes p-linéaires et par $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes p-linéaires alternées.

Exemple 35

Un des exemples les plus connus pour les formes multilinéaires alternées est le déterminant des matrices carrées d'ordre n. ▪

Pour une forme multilinéaire quelconque f on associe une forme multilinéaire alternée $\operatorname{Alt} f$ définie par

$$\operatorname{Alt} f(v_1, ..., v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\sigma} f\left(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}\right),$$

où S_p est l'ensemble des toutes les permutations de $\{1, 2, ..., p\}$.

Définition 121 (Produit tensoriel)

Soient f et g deux formes multilinéaires d'ordre p et r respectivement. On appelle produit tensoriel de f et g noté $f \otimes g$ la $(p+r)$-forme linéaire définie par

$$f \otimes g(v_1, ..., v_p, v_{p+1}, ..., v_{p+r}) = f(v_1, ..., v_p)\, g(v_{p+1}, ..., v_{p+r}).$$

Si $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, ..., p$, sont des formes linéaires, on peut définir une forme multilinéaire alternée f par

$$f(v_1, ..., v_p) = \det\left((g_i(x_j))_{1\leq i,j\leq p}\right).$$

On note $f = g_1 \wedge g_2 \wedge ... \wedge g_p$ et on l'appelle produit extérieur des formes $g_i, i = 1, ..., p$.

Définition 122 (Produit extérieur des formes multilinéaires)

Pour deux formes multilinéaires quelconques f et g on définit le produit extérieur de f et g par $f \wedge g = \mathrm{Alt}(f \otimes g)$.

Définition 123 (Base duale)

Si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on définit la base duale $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, i, j = 1, ..., n.$$

Proposition 124

Les $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ formes p-linéaires alternées $\left\{e_{i_1}^*, ..., e_{i_p}^*\right\}_{1\leq i_1<...<i_p\leq n}$ forment une base de l'espace des formes p-linéaires alternées $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$.

Notation 4

On note les éléments de la base duale par dx_i au lieu de e_i^*.

Définition 125 (Produit extérieur des formes multilinéaires alternées)

Soient f et g deux formes multilinéaires alternées d'ordre p et r respectivement.

$$f = \sum_{1\leq i_1<...<i_p\leq n} f_{i_1,...,i_p} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}, \quad g = \sum_{1\leq i_1<...<i_r\leq n} g_{i_1,...,i_r} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r}.$$

On définit la $(p + r)$-forme linéaire alternée par

$$f \wedge g = \sum_{\substack{1\leq i_1<...<i_p\leq n \\ 1\leq j_1<...<j_r\leq n}} f_{i_1,...,i_p} g_{j_1,...,j_r} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_r}.$$

Parmi les propriétés de ce produit, il est associatif, distributif par rapport à l'addition et il n'est pas commutatif, mais il satisfait

$$g \wedge f = (-1)^{p\,r} f \wedge g.$$

En particulier $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. De cette propriété on déduit que si f est une forme multilinéaire alternée d'ordre p impair alors $f \wedge f = 0$ et en particulier $dx_i \wedge dx_i = 0$.

5.1.2 Formes différentielles

Définition 126

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et p, k deux entiers naturels. On appelle forme différentielle d'ordre p et de classe $\mathcal{C}^k$ sur U toute application ω de U vers l'ensemble des formes p-linéaires alternées

$$\begin{aligned} \omega : \quad U &\to \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \end{aligned}$$

où $f_{i_1,\ldots,i_p}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Toute fonction f définie sur U est une forme différentielle d'ordre 0.

Exemple 36

Une forme différentielle ω d'ordre 1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ est donnée par $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ où P, Q et R sont des fonctions sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$. ∎

Exemple 37

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, alors $x \mapsto df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i$ est une forme différentielle d'ordre 1 sur U. ∎

Produit extérieur de deux formes différentielles

Soient ω et α deux formes différentielles sur $U \subset \mathbb{R}^n$ d'ordres respectifs p et r. La définition du produit extérieur des formes multilinéaires alternées s'étend aux formes différentielles, c'est-à-dire si

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \quad \text{et} \quad \alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} g_{i_1,\ldots,i_r}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r},$$

alors

$$(\omega \wedge \alpha)(x) = \omega(x) \wedge \alpha(x) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n}} f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, g_{j_1,\ldots,j_r}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_r}.$$

Exemple 38

Si $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, alors le produit extérieur des formes différentielles d'ordre 1, $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ et $dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$ est une forme différentielle d'ordre 2,

$$(df \wedge dg)(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)(x)\, dx_i \wedge dx_j.$$

En particulier si $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}(df \wedge dg)(x, y, z) = &\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right)(x, y, z)\, dx \wedge dy + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \right)(x, y, z)\, dx \wedge dz \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \right)(x, y, z)\, dy \wedge dz.\end{aligned}$$

De cette formule on déduit que $df \wedge df = 0$ et en particulier $dx \wedge dx = 0, dy \wedge dy = 0$ et $dz \wedge dz = 0$. ■

Différentielle extérieure

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, p, k deux entiers naturels et ω une forme différentielle d'ordre p et de classe $\mathcal{C}^k$ sur U,

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

On définit la différentielle extérieur de ω comme étant la $(p+1)$-forme différentielle définie par

$$d\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j}(x) \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Ceci définit une application d de l'espaces des formes différentielles d'ordre p dans l'espaces des formes différentielles d'ordre $p+1$.

Exemple 39

Si $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, alors

$$\begin{aligned}d\omega(x, y, z) = &\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x, y, z)\, dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right)(x, y, z)\, dx \wedge dz \\ &+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)(x, y, z)\, dy \wedge dz.\end{aligned}$$

■

Voici les propriétés fondamentales de la différentielle extérieure.

Proposition 127

Soient ω et α deux formes différentielles d'ordres respectifs p et r et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Alors on a

1. $d(\omega + \alpha) = d\omega + d\alpha$.
2. $d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^p \omega \wedge d\alpha$.
3. $d(d\omega) = 0$.

Définition 128 (Formes différentielles fermée et exacte)

Soit ω une forme différentielle d'ordre p et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

- On dit que ω est fermée si $d\omega = 0$.
- On dit que ω est exacte s'il existe une forme différentielle α telle que $d\alpha = \omega$.

On remarque que si ω est une forme différentielle exacte, alors elle est fermée. La réciproque est fausse en général. Mais il existe un résultat sous certaines conditions. Avant d'énoncer ce résultat nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 129 (Ouvert étoilé)

Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$, le segment $[a, x] = \{\lambda x + (1 - \lambda) a \ / \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ est contenu dans U.

Théorème 130 (Lemme de Poincaré)

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert étoilé, toute forme différentielle fermée sur U est exacte.

Exemple 40

Soit la forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\omega(x, y, z) = (-2y + yz)\, dx \wedge dy + 2x dx \wedge dz - xy dy \wedge dz$. On a $d\omega(x, y, z) = (y - 0 - y)\, dx \wedge dy \wedge dz = 0$. D'après le lemme de Poincaré, il existe une forme différentielle α telle que $d\alpha = \omega$. Vérifier que $\alpha(x, y, z) = (y^2 - 2xz)\, dx + xyz dy$ satisfait cette condition. ∎

Transposition par une application

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts et $\phi : V \subset \mathbb{R}^m \to U \subset \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. Soit ω une forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$ d'ordre p définie par

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

On appelle transposée de la forme différentielle ω, la forme différentielle du même ordre p et définie sur V par

$$\phi^*\omega(u) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(\phi(u))\, d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}.$$

Exemple 41

Si $\omega = dx \wedge dy$ et $\phi(r,u,v) = (x,y,z) = (r\cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$, alors

$$\begin{aligned}
\phi^*\omega(r,u,v) &= d(r\cos u\cos v) \wedge d(r\sin u \cos v) \\
&= (\cos u \cos v dr - r\sin u \cos v du - r\cos u \sin v dv) \wedge \\
&\qquad (\sin u \cos v dr + r\cos u\cos v du - r\sin u \sin v dv) \\
&= r\cos^2 v dr \wedge du + r^2 \sin v \cos v du \wedge dv.
\end{aligned}$$

■

Voici les propriétés fondamentales de la transposition.

1. $\phi^*(\omega + \alpha) = \phi^*\omega + \phi^*\alpha$.
2. $\phi^*(\omega \wedge \alpha) = \phi^*\omega \wedge \phi^*\alpha$.
3. $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.
4. $(\phi \circ \theta)^*\omega = \theta^*(\phi^*\omega)$.

Les opérateurs gradient, divergence et rotationnel

Le gradient, la divergence et le rotationnel sont les trois principaux opérateurs différentiels linéaires du premier ordre. On les rencontre en particulier

- En mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes).
- En électromagnétisme, où ils permettent d'exprimer les propriétés du champ électromagnétique.
- Ainsi que dans toute la physique mathématique (propagation, diffusion, résistance des matériaux, ...).

Définition 131 (Champ de vecteurs)

Soit U un ensemble de $\mathbb{R}^n$. On appelle champ de vecteurs ou champ vectoriel sur U, toute application de U dans $\mathbb{R}^m$. C'est-à-dire on associe un vecteur dans $\mathbb{R}^m$ à chaque point de U.

Définition 132 (Gradient)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le gradient de f est le champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \text{ où } x = (x_1, ..., x_n).$$

Exemple 42

Si $f(x, y, z) = 3xy^2z$, alors $\operatorname{grad} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = (3y^2z, 6xyz, 3xy^2)$. ▪

Définition 133 (Divergence et rotationnel)

Soit V un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On pose $V(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Le divergence de V est donné par

$$\operatorname{div} V = \nabla \cdot V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Le rotationnel de V est

$$\operatorname{Rot} V = \nabla \wedge V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \wedge (P, Q, R) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Exemple 43

Si $V(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$, alors

$\operatorname{div} V(x, y, z) = 0$ et $\operatorname{Rot} V(x, y, z) = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)$. ▪

Remarque 134

En termes des formes différentielles, si $V = (P, Q, R)$, $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ et $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$, alors $\operatorname{div} V = d\omega$ et $\operatorname{Rot} V = d\alpha$.

Définition 135 (Dérivé du potentiel)
Soit V un champ de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $V = \operatorname{grad} f$, on dit que V dérivé du potentiel f.

Les opérateurs précédentes ont les propriétés suivantes.

1. Si f est classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors $\operatorname{Rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

2. Si V est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors $\operatorname{div}(\operatorname{Rot} V) = 0$.

3. Si $V = \operatorname{grad} f$, alors $\operatorname{Rot} V = 0$.

4. Si $V = \operatorname{Rot} X$, alors $\operatorname{div} V = 0$.

5.2 Intégration de formes différentielles

Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et d'ordre p, définie par

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, x \in U.$$

Soit $\phi : D \subset \mathbb{R}^p \to U \subset \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. Le transposée de ω est une forme différentielle d'ordre p définie sur $D \subset \mathbb{R}^p$ et donnée par

$$\phi^*\omega(u) = h(u)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_p,$$

où h est une fonction réelle définie sur $D \subset \mathbb{R}^p$.

Définition 136 (Intégrale d'une forme différentielle)
On dit que la forme différentielle ω est intégrable sur ϕ si la fonction h est intégrable sur D. On définit alors l'intégrale de ω sur ϕ par $\int_\phi \omega = \int_D h(u)\, du$, où l'intégrale sur D est une intégrale multiple.

Pour $p = 1$ on l'appelle intégrale curviligne et pour $p = 2$ on l'appelle intégrale de surface. On s'intéresse ici par ces deux cas particuliers d'intégrales.

Avant d'aborder ces intégrales on jette un coup d'oeil sur les courbes et surfaces paramétrées.

5.2.1 Courbes et surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette section, on va donner quelques notions de base sur les courbes et les surfaces paramétriques régulières.

Chemins et courbes dans $\mathbb{R}^n$

Définition 137 (Chemin de $\mathbb{R}^n$)

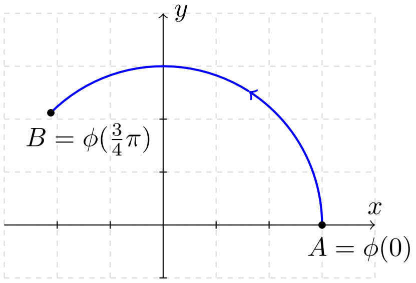
Un chemin ou arc de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ est défini comme étant une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle réel $I \subset \mathbb{R}$, vers $\mathbb{R}^n, n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \phi : \quad I \subset \mathbb{R} \quad &\to \mathbb{R}^n \\ t \qquad &\mapsto \phi(t) = (\phi_1(t), ..., \phi_n(t)). \end{aligned}$$

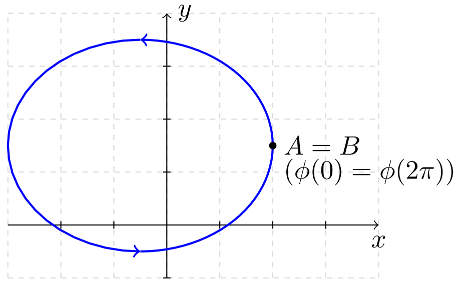
1. Si $I = [a, b], a < b$, les points initial $A = \phi(a)$ et final $B = \phi(b)$ sont appelés respectivement l'origine et l'extrémité de ϕ.
2. Dans le cas où les points initial et final coïncident i.e. $\phi(a) = \phi(b)$, on dit que le chemin ϕ est fermé ou est un lacet.
3. On note le chemin ϕ par (I, ϕ).

Exemple 44

Les fonctions $\phi(t) = (3\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$ et $\phi(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t, \frac{3}{2} + \sin t\right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ définies des chemins dans le plan.



$\boxed{\phi(t) = (3\cos t, 3\sin t),\ 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{4}.}$



$\boxed{\phi(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t, \frac{3}{2} + 2\sin t\right),\ 0 \leq t \leq 2\pi.}$ ▪

Définition 138 (Courbe paramétrée)

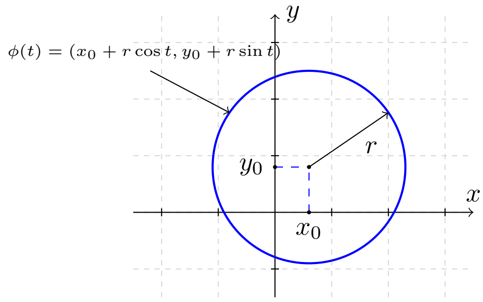
L'image $\gamma = \phi(I) = \{\phi(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \in I\}$ s'appelle support de ϕ ou courbe dans $\mathbb{R}^n$ paramétrée par la fonction ϕ.

Souvent on confond le chemin avec son support et on dit que γ est un chemin paramétré de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple 45

Le cercle dans le plan de centre (x_0, y_0) et de rayon r est une courbe paramétrée par la fonction

$$\phi(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t), \ 0 \le t \le 2\pi.$$



Cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r ∎

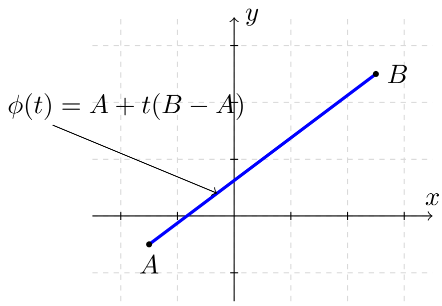
Exemple 46

Le segment d'extrémités A et B noté $[A, B]$ est une courbe paramétrée par la fonction

$$\phi(t) = (1-t)A + tB, \ 0 \le t \le 1,$$

ou

$$\phi(t) = A + t(B - A), \ 0 \le t \le 1.$$



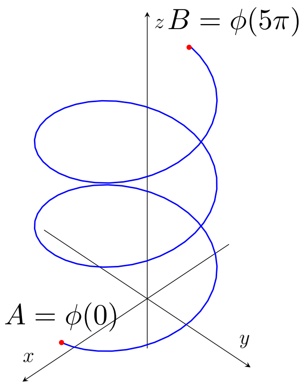
Segment d'extrémités A et B ∎

Exemple 47

La fonction

$$\phi(t) = (1 + 3\cos t, 2\sin t, 1 + t), \ 0 \le t \le 3\pi$$

représente une courbe paramétrique dans l'espace $\mathbb{R}^3$.



∎

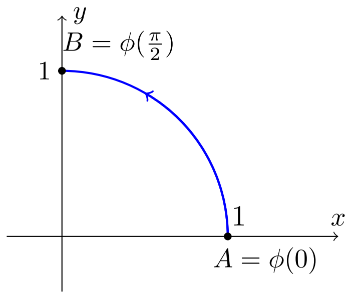
Définition 139

- On dit que deux chemins (I, ϕ) et (J, ψ) sont $\mathcal{C}^k$-équivalents s'il existe une bijection $g : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^k$, ainsi que sa réciproque, telle que $\phi = \psi \circ g$.
- La fonction g, qui est strictement monotone, est appelée changement de paramètre.
- On dit que g est un changement de paramètre admissible de $\gamma = \phi(I)$ si $k \ge 1$.
- Si la fonction g est strictement croissante, on dit que les chemins (I, ϕ) et (J, ψ) sont de même orientation.

Exemple 48

Soit γ la courbe paramétrée par le chemin

$$\begin{array}{rll} \phi: & \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto \phi(t) = (\cos t, \sin t). \end{array}$$

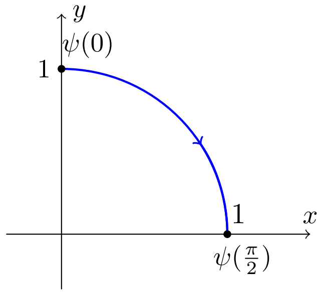


$\boxed{\phi(t) = (\cos t, \sin t), \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.}$

Le sens de l'orientation de γ induite par ϕ est de $A = \phi(0)$ vers $B = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Le chemin

$$\begin{array}{rll} \psi: & \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto \phi(t) = (\sin t, \cos t) \end{array}$$



$\boxed{\psi(t) = (\sin t, \cos t), \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.}$

admet le même support que celui de ϕ, i.e. $\phi\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \psi\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, mais l'orientation définie par ϕ est opposée à l'orientation définie par ψ.

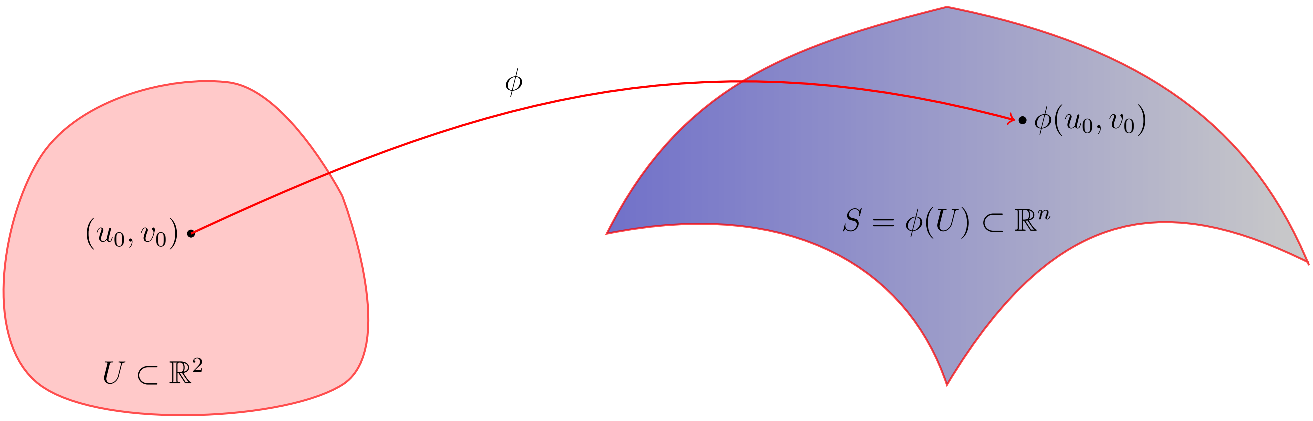
Le changement de paramètre $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est défini par $g(t) = \frac{\pi}{2} - t$. ▪

Surfaces paramétrées

Définition 140

Une surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ est une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^k$ d'un ouvert connexe U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

$$\begin{array}{rll} \phi: & U \subset \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^n \\ & (u, v) & \mapsto \phi(u, v) = (\phi_1(u, v), ..., \phi_n(u, v)). \end{array}$$



Définition 141 (Surface paramétrée)

L'image $S = \phi(U) = \{\phi(u,v) \in \mathbb{R}^n, \ (u,v) \in U\}$ s'appelle support géométrique de la surface paramétrée ϕ.

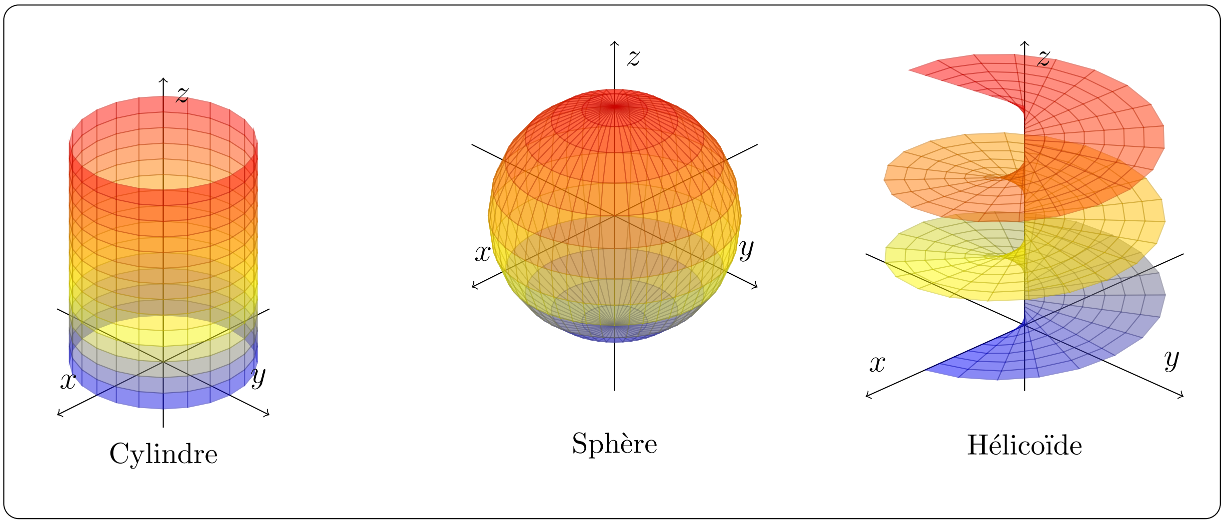
Exemple 49

Le cylindre, la sphère et l'hélicoïde dans $\mathbb{R}^3$ sont paramétrés respectivement par les fonctions

$$\phi(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v), u \in [0, 2\pi[, v \in I \subset \mathbb{R},$$

$$\varphi(u,v) = (r\cos u \sin v, r\sin u \sin v, r\cos v), u \in [0, 2\pi[, v \in [0, \pi[,$$

$$\psi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v), \quad (u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$



■

- Si pour $(u_0, v_0) \in U$ les vecteurs $\frac{\partial\phi}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial\phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont linéairement indépendants, le plan qu'ils engendrent est le plan tangent à la surface au point (u_0, v_0).
- Leur produit vectoriel $\eta(u_0, v_0) = \frac{\partial\phi}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial\phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ est un vecteur normal à la surface (orthogonal au plan tangent).
- Le vecteur unitaire $n(u_0, v_0) = \frac{\eta(u_0, v_0)}{\|\eta(u_0, v_0)\|}$ s'appelle la normale orientée au point (u_0, v_0).

Comme dans le cas des courbes, si $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ est une surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ et $g : V \subset \mathbb{R}^2 \to U$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, alors $\phi = \psi \circ g$ est une surface paramétrée qui a exactement le même support géométrique que ψ.

Si $k \geq 1$, on dit que g est un changement de variable admissible et que $\phi = \psi \circ g$ est une reparamétrisation de ψ.

5.2.2 Intégrale curviligne

Soit γ une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^n$ par le chemin $\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. On peut définir l'intégrale curviligne d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou d'une forme différentielle ω d'ordre 1.

Définition 142

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale curviligne de f sur la courbe γ paramétrée par $\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est définie comme étant $\int_\phi f = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| \, dt$ où $\|\phi'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\phi_i'(t))^2} = \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + ... + (\phi_n'(t))^2}$.

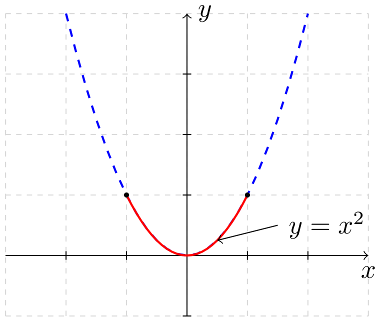
Remarque 143

1. La définition précédente ne dépend pas du choix de représentation paramétrique de γ.
2. Pour $f \equiv 1$ sur γ, on retrouve la longueur de la courbe γ, $|\gamma| = \int_a^b \|\phi'(t)\| \, dt$.

Exemple 50

Calculons la longueur de la courbe

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = x^2, \ -1 \leq x \leq 1\right\}.$$



La courbe C peut être décrite par

$$C = \left\{(x(t), y(t)) = \left(t, t^2\right) \in \mathbb{R}^2, \ t \in [-1,1]\right\}.$$

La longueur de C est

$$|C| = \int_{-1}^{1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4t^2} dt = \sqrt{5} + \frac{1}{4} \operatorname{Log}\left(\sqrt{5}+2\right). \qquad \blacksquare$$

Maintenant, on définit l'intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe.

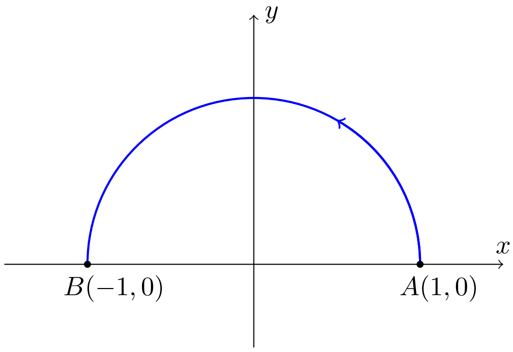
Définition 144

Soit ω une forme différentielle continue d'ordre 1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant $\phi([a,b])$. On note $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \, dx_i$. On définit l'intégrale curviligne de la forme différentielle ω sur le chemin ϕ par

$$\int_\phi \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\phi(t)) \, \phi_i'(t) \, dt.$$

Exemple 51

Calculons l'intégrale $\int_\gamma x^2dx - xydy$ où γ est l'arc demi cercle de centre O et de rayon 1 d'origine $A(1,0)$ et d'extrémité $B(-1,0)$.



On peut paramétrer la courbe orienté γ par

$$\begin{array}{llll}\phi: & [0,\pi] & \to \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t).\end{array}$$

Alors
$$\begin{aligned}\int_\gamma x^2dx - xydy &= \int_0^\pi \left(\cos^2 t\,(-\sin t) - \cos t \sin t\,(\cos t)\right) dt \\ &= -2\int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt = \left[\tfrac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^\pi = -\tfrac{4}{3}.\end{aligned}$$
∎

Circulation d'un champ de vecteurs

Définir une forme différentielle ω d'ordre 1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ par $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\,dx_i$ revient à définir un champ de vecteurs

$$\begin{array}{lll}V: & U & \to \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto V(x) = (\omega_1(x), ..., \omega_n(x)).\end{array}$$

L'intégrale de la forme ω sur la courbe γ est appelé le travail ou la circulation de ce champ de vecteurs V sur γ, et on écrit

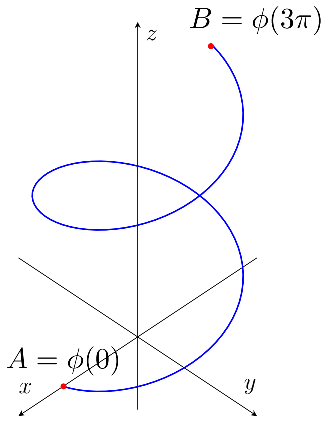
$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\,dx_i = \int_\gamma V(x)\,dx.$$

Si $\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ désigne une paramétrisation de γ. On note symboliquement $dx = (dx_1, ..., dx_n) = \phi'(t)\,dt$. La circulation du champ de vecteurs V le long de γ est donnée alors par

$$\int_\gamma V(x)\,dx = \int_a^b V(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\phi(t))\,\phi_i'(t)\,dt.$$

Exemple 52

Calculons la circulation I du champ de vecteurs V défini sur $\mathbb{R}^3$ par $V(x,y,z) = (4y, 0, 2z)$, le long de la courbe γ paramétré par



$$\begin{array}{lll}\phi: & [0,3\pi] & \to \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, t).\end{array}$$

On a

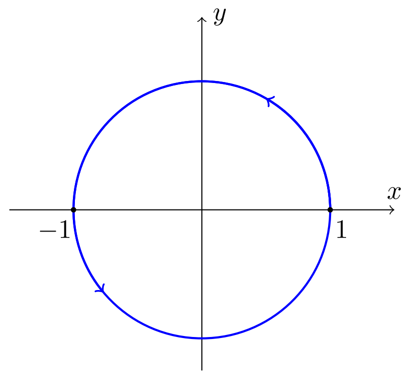
$$\begin{aligned}I &= \int_0^{3\pi} (4\sin t, 0, 2t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\,dt \\ &= \int_0^{3\pi} \left(-4\sin^2 t + 2t\right) dt = \left[\sin(2t) - 2t + t^2\right]_0^{3\pi} = 9\pi^2 - 6\pi.\end{aligned}$$
∎

Cas d'une forme différentielle exacte

Si la forme ω est une différentielle exacte (le champ de vecteurs associé dérivant d'un potentiel), alors son intégrale sur une courbe γ ne dépend que des extrémités de cette courbe. En d'autres termes, si $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i$, $V(x) = (\omega_1(x), ..., \omega_n(x))$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\nabla f(x) = V(x)$ alors l'intégrale sur γ paramétré par $\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de la forme différentielle $\omega = df$ est égale à $\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\phi(b)) - f(\phi(a)) = f(B) - f(A)$ où $A = \phi(a)$ désigne l'origine de γ et $B = \phi(b)$ désigne l'extrémité de γ.
En particulier si γ est une courbe fermée i.e. $\phi(a) = \phi(b)$, on a $\int_\gamma \omega = 0$.

Ce résultat est parfois utilisé pour prouver qu'une forme différentielle donnée n'est pas exacte sur un ouvert U donné ; s'il existe une courbe fermée γ telle que $\int_\gamma \omega \neq 0$ alors ω n'est pas exacte.

Exemple 53



Soit ω la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ définie par $\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ et γ le cercle de centre O et de rayon 1. On peut paramétrer la courbe orienté γ par

$$\begin{aligned} \phi : \ & [0, 2\pi] && \to \mathbb{R}^2 \\ & t && \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

On a

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t))\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0,$$

alors ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. ▪

5.2.3 Intégrale de surface

On peut définir l'intégrale de surface pour les fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et pour les formes différentielles d'ordre 2 sur U.

Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et S la surface paramétrée dans $\mathbb{R}^n$ par l'application

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n, n \geq 3.$$

Intégrale de surface d'une fonction

Définition 145 (Intégrale de surface d'une fonction)

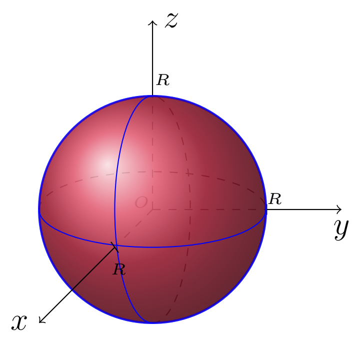
Si f est une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant $S = \phi(D)$, son intégrale sur la surface S est définie par

$$\int_S f = \iint_D f(\phi(u,v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv.$$

Remarque 146 (L'aire d'une surface)

Si $f \equiv 1$ l'intégrale $\int_S f$ est égale à l'aire de S i.e. $Aire(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv.$

Exemple 54



Calculons l'aire de la sphère

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \right\}.$$

La sphère S peut être paramétrée par l'application

$$\begin{array}{llll} \phi : & D = [0, 2\pi[\times [0, \pi[& \to \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto (x,y,z)(u,v) = (R\cos u \sin v, R \sin u \sin v, R\cos v). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) &= R^2 (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0) \wedge (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v) \\ &= R^2 \left(-\cos u \sin^2 v, -\sin u \sin^2 v, -\cos v \sin v \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\| &= R^2 \sqrt{\cos^2 u \sin^4 v + \sin^2 u \sin^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} \\ &= R^2 \sqrt{\sin^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} = R^2 \sin v. \end{aligned}$$

D'où

$$Aire(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} R^2 \sin v dv = 4\pi R^2. \quad \blacksquare$$

Intégrale de surface d'une forme différentielle d'ordre 2

Soit ω une forme différentielle d'ordre 2 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant $S = \phi(D)$, définie par

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{i,j}(x)\, dx_i \wedge dx_j, \quad x = (x_1, ..., x_n).$$

Le transposée de ω est une forme différentielle d'ordre 2 définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ et donnée par

$$\phi^*\omega(u,v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{i,j}(\phi(u,v))\, d\phi_i \wedge d\phi_j.$$

Comme

$$\begin{aligned} d\phi_i \wedge d\phi_j &= \left(\tfrac{\partial \phi_i}{\partial u}(u,v)\, du + \tfrac{\partial \phi_i}{\partial v}(u,v)\, dv\right) \wedge \left(\tfrac{\partial \phi_j}{\partial u}(u,v)\, du + \tfrac{\partial \phi_j}{\partial v}(u,v)\, dv\right) \\ &= \tfrac{D(\phi_i,\phi_j)}{D(u,v)}(u,v)\, du \wedge dv, \end{aligned}$$

où $\frac{D(\phi_i,\phi_j)}{D(u,v)} = \det J(\phi_i,\phi_j) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial u} & \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial u} & \frac{\partial \phi_j}{\partial v} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial u}\frac{\partial \phi_j}{\partial v} - \frac{\partial \phi_i}{\partial v}\frac{\partial \phi_j}{\partial u}\right)$, alors

$$\phi^*\omega(u,v) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{i,j}(\phi(u,v))\, \tfrac{D(\phi_i,\phi_j)}{D(u,v)}(u,v)\right) du \wedge dv.$$

Définition 147 (Intégrale de surface d'une forme différentielle d'ordre 2)
Avec les notations précédentes, l'intégrale sur la surface S de la forme différentielle ω est définie par

$$\int_S \omega = \iint_D \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{i,j}(\phi(u,v))\, \tfrac{D(\phi_i,\phi_j)}{D(u,v)}(u,v)\right) dudv.$$

En particulier si ω est une forme différentielle d'ordre 2 définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ i.e.

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\, dy \wedge dz + Q(x,y,z)\, dz \wedge dx + R(x,y,z)\, dx \wedge dy$$

et si $\phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))$, alors

$$\int_S \omega = \iint_D \left(P(\phi(u,v))\, \tfrac{D(\phi_2,\phi_3)}{D(u,v)} + Q(\phi(u,v))\, \tfrac{D(\phi_3,\phi_1)}{D(u,v)} + R(\phi(u,v))\, \tfrac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(u,v)}\right) dudv.$$

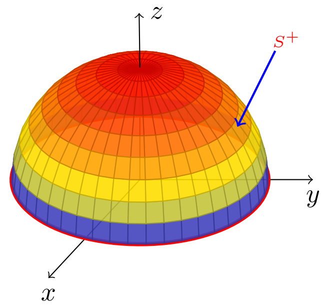
Si on pose $V = (P, Q, R)$, alors

$$\int_S \omega = \iint_D V(\phi(u,v)) \cdot N(u,v)\, dudv,$$

où $N = \left(\frac{D(\phi_2,\phi_3)}{D(u,v)}, \frac{D(\phi_3,\phi_1)}{D(u,v)}, \frac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(u,v)}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}$ est le vecteur normal à la surface S.

Exemple 55

Soit $S^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$ la demi-sphère supérieure du rayon 2 centrée à l'origine.



Calculons l'intégrale $I = \iint\limits_{S^+} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.

La demi-sphère S^+ peut être paramétrée par l'application

$$\begin{aligned} \phi: \quad D = [0, 2\pi[\times \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \quad &\mapsto (x, y, z)(u, v) = (2\cos u \sin v, 2\sin u \sin v, 2\cos v). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} dy \wedge dz \quad &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} du \wedge dv = \det \begin{bmatrix} 2\cos u \sin v & 2\sin u \cos v \\ 0 & -2\sin v \end{bmatrix} du \wedge dv \\ &= -4\cos u \sin^2 v du \wedge dv. \end{aligned}$$

De la même façon on obtient

$$dz \wedge dx = -4\sin u \sin^2 v du \wedge dv \quad \text{et} \quad dx \wedge dy = -4\cos v \sin v du \wedge dv.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} I \quad &= 8 \iint\limits_D \left((\cos u \sin v)\left(-\cos u \sin^2 v\right) + (\sin u \sin v)\left(-\sin u \sin^2 v\right) + (\cos v)\left(-\cos v \sin v\right)\right) dudv \\ &= -8 \iint\limits_D \left(\cos^2 u \sin^3 v + \sin^2 u \sin^3 v + \cos^2 v \sin v\right) dudv \\ &= -8 \iint\limits_D \left(\sin^3 v + \cos^2 v \sin v\right) dudv = -8 \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v dv = -16\pi. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

5.3 Formules de Stokes, de Green-Riemann et d'Ostrogradski

Le théorème fondamental du calcul intégral affirme que l'intégrale d'une fonction f d'une variable réelle définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est égale à la variation d'une primitive F de f sur le bord de l'intervalle i.e. $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ où $F'(x) = f(x)$.

C'est en fait le cas particulier en dimension 1 du théorème de Stokes, qui exprime l'intégrale sur le bord d'un domaine de $\mathbb{R}^p$, en termes d'une intégrale sur l'intérieur de ce domaine.

Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert borné U de $\mathbb{R}^n$ et d'ordre $p \leq n$ et soit $\phi : D \subset \mathbb{R}^p \to U \subset \mathbb{R}^n$ une application injective de classe $\mathcal{C}^k$. L'ensemble $M = \phi(D) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ est appelé sous-variété différentielle orientée de dimension p. La formule générale de Stokes est

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

où $d\omega$ désigne la dérivée extérieure de ω et ∂M le bord de M, muni de l'orientation sortante.

Les formules suivantes de Green-Riemann et d'Ostrogradski sont des cas particuliers de la formule générale de Stokes.

5.3.1 Formule de Green-Riemann

La formule de Green-Riemann établit une relation entre l'intégrale d'une forme différentielle ω d'ordre 1 sur une courbe fermée simple γ de $\mathbb{R}^2$ et une intégrale double sur le domaine intérieur à γ. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, cette formule peut être vu comme un analogue du théorème fondamental du calcul intégral pour les fonctions d'une variable.
Avant d'énoncer cette formule nous avons besoin des définitions suivantes.

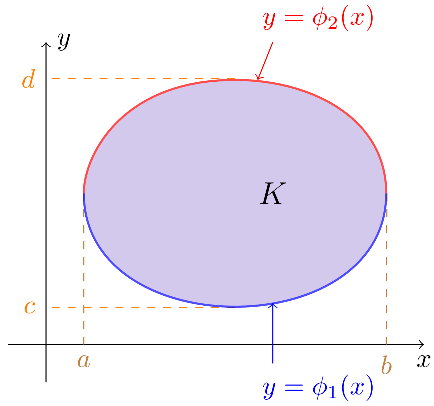
Définition 148 (Compact élémentaire)
On appelle compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$ tout compact K pouvant être défini à la fois par les ensembles suivantes.

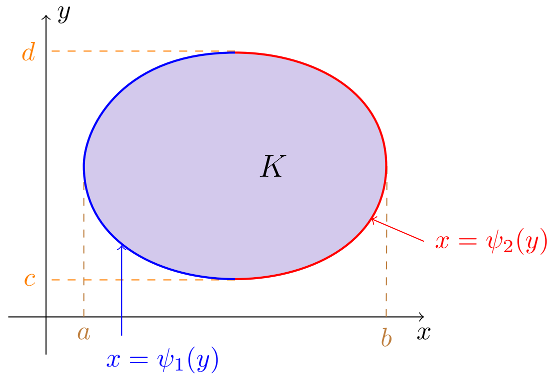
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq x \leq b, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

et

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

où ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions continues.



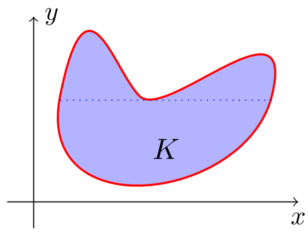


Exemple 56

Les rectangles, les disques et les ellipses sont des compacts élémentaires. ▪

Définition 149 (Compact simple)

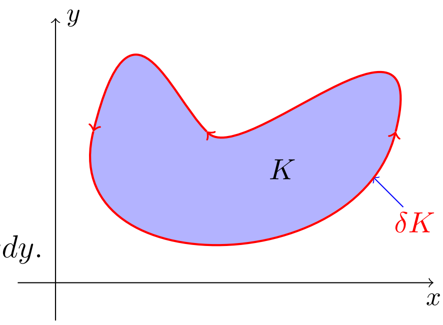
On appelle compact simple tout compact décomposable en un nombre fini de compacts élémentaires au moyen de parallèles aux axes.



Théorème 150 (Théorème de Green-Riemann)

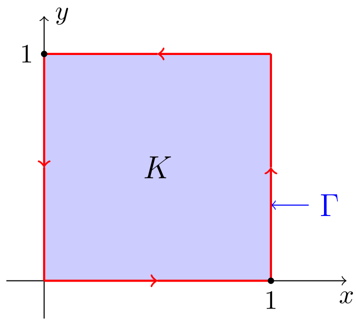
Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle d'ordre 1 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant un compact simple K. Si δK désigne le bord orienté de K on a

$$\int\limits_{\delta K} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{K} \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \tfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy.$$



Exemple 57

Calculons en utilisant la formule de Green $\int_\Gamma x^2dx + xydy$, où Γ est le bord du carré $K = [0,1] \times [0,1]$ parcouru dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre). Posons $P(x,y) = x^2$ et $Q(x,y) = xy$. En utilisant la formule de Green-Riemann, on a



$$\int_\Gamma x^2dx + xydy = \iint\limits_K (y-0)\,dxdy = \int_0^1 ydy \int_0^1 dx = \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

L'aire d'un domaine

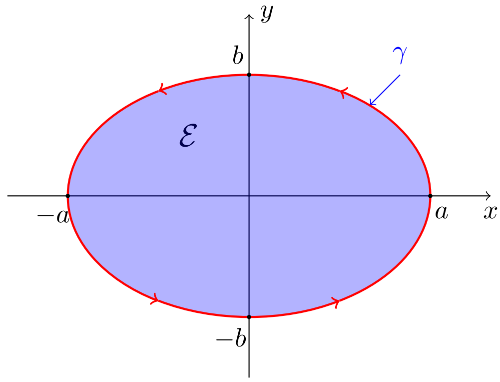
Pour tout compact simple $K \subset \mathbb{R}^2$ on a

$$\int\limits_{\delta K} xdy = \iint\limits_K dxdy \text{ et } \int\limits_{\delta K} ydx = -\iint\limits_K dxdy.$$

L'aire A de K peut donc être calculée à l'aide d'une intégrale curviligne à savoir

$$A(K) = \iint\limits_K dxdy = \int\limits_{\delta K} xdy = -\int\limits_{\delta K} ydx = \int\limits_{\delta K} \tfrac{1}{2}(xdy - ydx).$$

Exemple 58 (L'aire d'une ellipse)



Calculons l'aire de l'ellipse pleine $(\mathcal{E}) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Le bord γ de $(\mathcal{E})$ est paramétré par

$$\begin{aligned} \phi : \quad [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) = (a\cos t, b\sin t). \end{aligned}$$

Ainsi

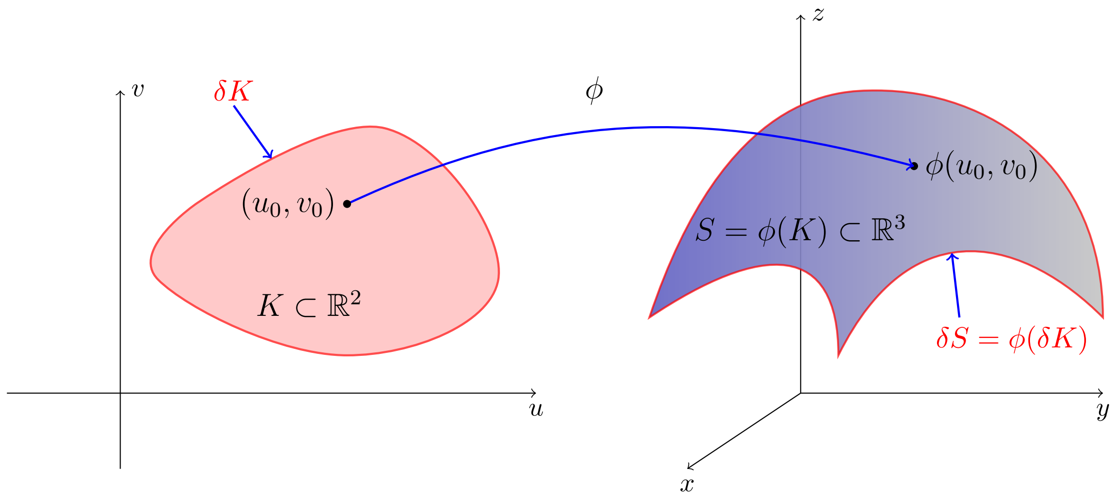
$$\int\limits_{\gamma} \tfrac{1}{2}(xdy - ydx) = \int\limits_{0}^{2\pi} \tfrac{1}{2}(a\cos t\,(b\cos t) - b\sin t\,(-a\sin t))\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}ab\right) dt = \pi ab.$$

Par conséquent, $Aire(\mathcal{E}) = \pi ab$. ∎

Extension de la formule de Green-Riemann

La formule de Green-Riemann s'étend aux formes différentielles d'ordre 1 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Cette formule est appelée formule de Stokes dans $\mathbb{R}^3$.

Soit K un compact simple de $\mathbb{R}^2$ et S une surface orientée dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par une fonction injective ϕ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $S = \phi(K)$. Le bord δS de S il n'est que l'image par ϕ du bord δK de K i.e. $\delta S = \phi(\delta K)$.



Théorème 151 (Formule de Stokes dans $\mathbb{R}^3$)
Soit $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ une forme différentielle d'ordre 1 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ contenant la surface S parametrée par $\phi : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. On a

$$\int_{\delta S} \omega = \iint_S d\omega.$$

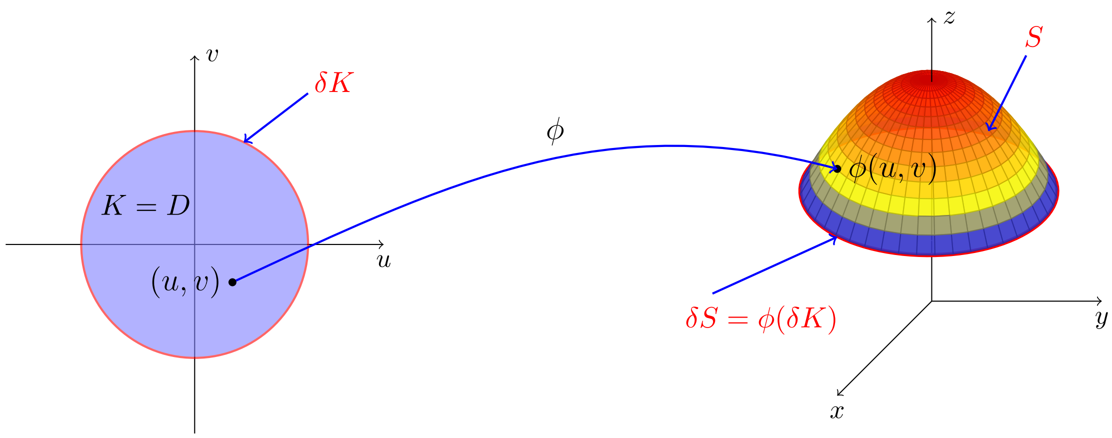
Rappeler que

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz.$$

Exemple 59

Soit $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + v^2 \leq 1\}$ et soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$\begin{aligned} \phi : \quad & D && \to \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) && \mapsto (x,y,z)(u,v) = (u,v,2-u^2-v^2). \end{aligned}$$



Calculons directement et la par formule de Stokes l'intégrale $\int_{\delta S} ydx + zdy + xdz$.
La courbe δS peut être paramétrée par le chemin

$$\begin{aligned} \psi : \quad & [0,2\pi] && \to \mathbb{R}^3 \\ & t && \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, 1). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\delta S} ydx + zdy + xdz &= \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) + 1(\cos t) + \cos t(0)]\, dt \\ &= \left[-\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin(2t) + \sin t\right]_0^{2\pi} = -\pi. \end{aligned}$$

Par la formule de Stokes on a

$$\begin{aligned} \int_{\delta S} ydx + zdy + xdz = \iint_S d(ydx + zdy + xdz) = \iint_S -dx \wedge dy + dx \wedge dz - dy \wedge dz \\ = \iint_D (-1-2v-2u)\, dudv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-1 - 2r\sin\theta - 2r\cos\theta)\, r dr d\theta = -\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.3.2 Formule d'Ostrogradski

Théorème 152 (Théorème d'Ostrogradsky)

Soit $\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\,dy \wedge dz + Q(x,y,z)\,dz \wedge dx + R(x,y,z)\,dx \wedge dy$ une forme différentielle d'ordre 2 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ contenant un compact simple K. Si δK désigne le bord orienté de K on a

$$\iint\limits_{\delta K} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint\limits_{K} \left(\tfrac{\partial P}{\partial x} + \tfrac{\partial Q}{\partial y} + \tfrac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Remarque 153

Si on pose $V = (P,Q,R)$ et $d\sigma = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$ alors la formule d'Ostrogradski s'écrit sous la forme

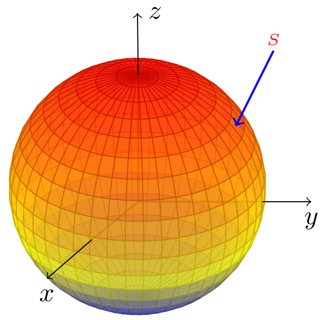
$$\iint\limits_{\delta K} V(x,y,z) \cdot d\sigma = \iiint\limits_{K} \operatorname{div} V(x,y,z)\,dxdydz.$$

Cette formule s'interprète comme suit : l'intégrale de la divergence de V dans le compact K est égale au flux de V à travers le bord δK.

Exemple 60

Reprenons l'exemple 55. Calculons l'intégrale

$$I = \iint\limits_{S} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$



en utilisant la formule d'Ostrogradski, où

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}$$

est la sphère du rayon 2 centrée à l'origine.

On a $P(x,y,z) = x, Q(x,y,z) = y$ et $R(x,y,z) = z$, alors d'après la formule d'Ostrogradski

$$I = \iiint\limits_{K} \left(\tfrac{\partial P}{\partial x} + \tfrac{\partial Q}{\partial y} + \tfrac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iiint\limits_{K} (1+1+1)\,dxdydz = \iiint\limits_{K} 3dxdydz,$$

où $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Par le changement de variables en coordonnées sphériques $(x,y,z) = (r\cos u \sin v, r \sin u \sin v, r\cos v)$,

$$I = \iiint\limits_{K} dxdydz = \int_0^2 3r^2dr \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v dv = 32\pi. \qquad \blacksquare$$

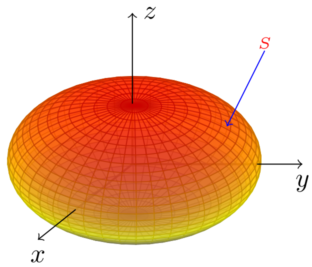
Volume d'un domaine dans $\mathbb{R}^3$

Soit K un compact simple dans $\mathbb{R}^3$ limité par une surface S orientée de façon que les vecteurs normaux soient extérieurs à K.

Le volume de K peut être calculée à l'aide d'une intégrale de surface

$$vol\,(K) = \iint\limits_S x dy \wedge dz = \iint\limits_S y dz \wedge dx = \iint\limits_S z dx \wedge dy.$$

Exemple 61 (Volume d'un ellipsoïde plein)



Calculons le volume de l'ellipsoïde plein $(\mathcal{E}) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.
Le bord $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$de $(\mathcal{E})$ peut être paramétré par

$$\begin{array}{llll} \phi: & D = [0, 2\pi[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto (x, y, z)\,(u, v) = (a\cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)\,. \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} vol\,(\mathcal{E}) &= \iint\limits_S x dy \wedge dz = a\cos u \cos v \det\left(\begin{bmatrix} b\cos u \cos v & -b \sin u \sin v \\ 0 & c\cos v \end{bmatrix}\right) dudv \\ &= \iint\limits_D abc \cos^2 u \cos^3 v dudv = abc \int_0^{2\pi} \cos^2 u du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv = \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

Par conséquent, le volume de l'espace délimité par un ellipsoïde est $vol(\mathcal{E}) = \frac{4}{3}\pi abc$. ∎

Références

[1] **D.E. Medjadi, M. Boukra, A. Djadane et B.K. SadAllah**, Analyse mathématique. Vol.2, Fonctions de plusieurs variables réelles. O.P.U. Alger, Algérie 1994.

[2] **A. Cohen**, Fonctions de plusieurs variables et intégrales multiples, Notes du Cours LM 216, Université Pierre et Marie Curie 4, Paris, France 2012.

[3] **A. Guyader**, Variables multiples, Université Rennes 2 France 2013.

[4] **A. Djadane et B.K. SadAllah**, Calcul différentiel, Précis de cours et exercices résolus, O.P.U. Alger, Algérie 1994.

[5] **L. Baffico**, Fonctions de plusieurs variables, Notes du Cours SV105 (chapitre 8), Université de Caen, France 2009.

[6] **F. Ronga**, Analyse réelle post-élémentaire, Genève, 2006.